K. E. グスタフソン

応用偏微分方程式

——近代的方法への入門——

(下)

増補寄稿

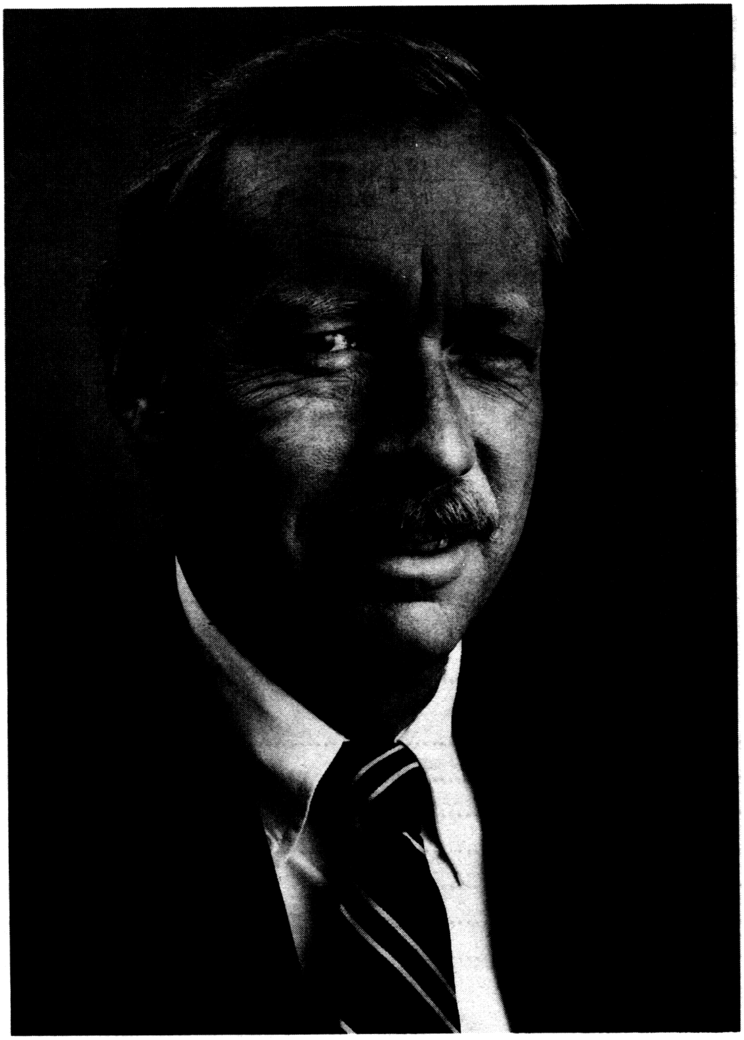
K.E.グスタフソン

音田　功
阿部剛久　訳

海外出版貿易株式会社

Library of Congress Cataloging in Publication Data:

Gustafson, Karl E.
Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods.
Bibliography: p.
Includes indexes.
1. Differential equations, Partial. 2. Hilbert space.
I. Title. II. Title: Partial differentail equations and Hilbert space methods.
QA374.G97 1987 515.3'53 86-26630
ISBN 0-471-83227-8



最近のK.E.Gustafson教授　教授の専門は数学にとどまらず，物理学，工学および計算科学におよぶ広汎な分野において精力的に教育・研究活動を展開．国際的な指導者の地位にあって，各界での信望は厚く，米国内での影響力は大きい((上)原著者紹介参照)．近年は大学教育の問題を始め，科学史の問題にも積極的に取り組んでいる．優しい人柄は自然を愛し，東洋の思想にも造詣あって，その知性はとどまることのない教養人でもある．世界を駆ける教授も来日は未だ果たしてない由である．

わが子，Amy と Garth へ

下　巻　目　次

—上巻　主要目次—

2.6　Fourier級数と変分法および数値的方法

偏微分方程式の解の数値近似の考えを，次の単純な境界値問題を用いて説明しよう．

$$
\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上} & u = f. \end{cases}
$$

ここで例えば，$u(x,y)$は正方形厚板の点(x,y)での温度とする．その境界温度fが図2.6aに示された十二個の境界点で知られていて，求めたいのは四個の内部格子点での温度を近似すること，またはそれらを推定することである．例えば，fは三辺上で0，すなわち，$f(0,\ 0)=f(0,\ 1)=f(0,\ 2)=f(0,\ 3)=f(1,\ 3)=f(2,\ 3)=f(3,\ 3)=f(3,\ 2)=f(3,\ 1)=f(3,\ 0)=0$とし，$f(1,\ 0)=1$，$f(2,\ 0)=2$とする．さて要求されているのは，温度$u(1,\ 1)$，$u(1,\ 2)$，$u(2,\ 1)$，$u(2,\ 2)$を推定することである．

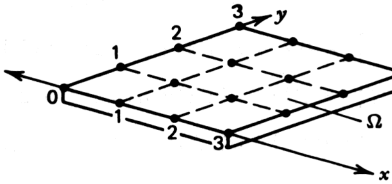


図2.6a

この温度推定を行うときの有効な方法を決定するために，三つの異なる視点から答えを出してみよう．それらはすべて同じ結論に達するであろう．数値的方法に対して，それは結果を確実にさせるのに常に好ましいことである．

まず，調和関数に対する平均値定理（節1.6.1参照）から，内部格子点での$u(x,y)$の近似は，隣り合った4個の格子点でのuの値の平均をとるのが妥当である*)．第二に，物理学的観点から，定常状態の温度が等方的に自己平均化の法則に従うことを求めるのは，全く穏当であろう．次に説明さるべき第三の立場は，これらの妥当性の記載に多少なりともよりよい精度をもち込み，微分方程式の解を近似するいわゆる**差分法**である†)．何故なら，偏導関数をそれらを近似する差分商によっておきかえると，

*)　これは格子点(x,y)を中心とする単位円上での積分$\oint u$の，この積分に対するRiemann和

$$
\sum_{i=1}^{4} u(x_i,y_i)\Delta i\theta,\quad \text{ただし}\ \Delta i\theta=\pi/2
$$

による近似になっている．

†)　この方法は明らかに，放物型や双曲型に対しても同様に行なえる．

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cong \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \cong \frac{\dfrac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}-\dfrac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h}}{h}.$$

すなわち，1階導関数に対しては単独前進差分をとり，2階導関数に対しては，単独後退差分をとる．他の独立変数yに対しても同様にして，次の様にとる．

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \cong \frac{u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)}{k^2}.$$

次に方程式

$$0=\Delta u \cong u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+k)+u(x,y-k)-4u(x,y)$$

を解くと，$h=k=1$のとき，上で論じたと同じ近似となる．

$$u(1,1)=\tfrac{1}{4}(u(0,1)+u(1,2)+u(1,0)),$$
$$u(1,2)=\tfrac{1}{4}(u(0,2)+u(1,3)+u(2,2)+u(1,1)),$$
$$u(2,1)=\tfrac{1}{4}(u(1,1)+u(2,2)+u(3,1)+u(2,0)),$$
$$u(2,2)=\tfrac{1}{4}(u(1,2)+u(2,3)+u(3,2)+u(2,1)).$$

またこの方法で，境界値問題は次の行列の代数の問題に帰着される．
すなわち，これを行列形式で表すと，

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1,1) \\ u(1,2) \\ u(2,1) \\ u(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，その解は(問題1参照)

$$u(1,1)=\tfrac{11}{24},\qquad u(1,2)=\tfrac{4}{24},\qquad u(2,2)=\tfrac{5}{24}.$$

この差分法は微分方程式の数値的扱いにおいて有力な手段である．網目の大きさh,kをより小さくとることにより，またより細かい差分による近似を用いることによって，精度は格段と向上する*)．本節の残りで，微分方程式の数値解法で極く最近発達したもの，すなわち，有限要素法を簡潔に述べよう．この方法は，ある場合には

*)　後述の休止第4回を見よ．

差分法の変分的形式と見なすことができる*). 同様の関連下で, 他の変分的方法も考えよう. それらすべては, 適当なエネルギーノルムによる最良の最小2乗近似に依存する.

ここで, 先の例にもどろう. 簡単のため, 境界値fが境界上のすべての点で知られているものと仮定し, 不明確を避けるために, $f(x)$が区分的に1次の関数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqq x\leqq 2, \\ 2(3-x), & 2\leqq x\leqq 3 \end{cases}$$

として与えられたとする(図2.6c). あるいはできることなら, これに1次内挿を適用して, 境界格子点で与えられた最初のデータに適合させるとしてもよい. 上述の様に, このとき差分法は正方形Ωの網目のサイズh,kを更に細かな格子に分割し, 対応する更に大きな代数的線形系の解により, 各格子点での$u(x,y)$を近似する. 今ここで内挿されたデータは, この手続きをとっている最中, より細かな境界格子点で利用されることになろう.

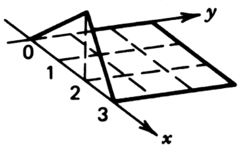


図2.6b

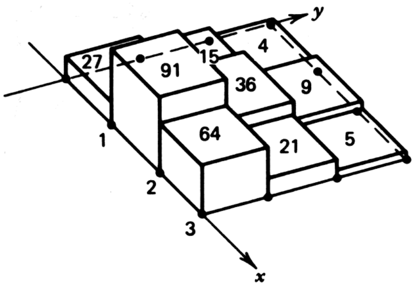


図2.6c

*) 数値的方法, 特に実行する立場からのより進んだ導入は第3章附録Bで与えられる. もっと詳しい取扱いについては次に与える参考書を読まれたい. S.Forythe and W.Wasaw, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1960(訳者注：偏微分方程式の差分法による近似解法. 藤野精一訳, 吉岡書店)；R.S.Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962(訳者注：計算機による大型行列の反復解法, 渋谷政昭他訳, サイエンス社). これらは偏微分方程式の取扱いに用いられる差分法や, その他の数値的方法に関して, より深く読むための標準的参考書である. より最近の進歩に対して, O.Zienkiewicz, *The Finite Element method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1971(訳者注：基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 吉識雅夫, 山田嘉昭監訳, 培風館)；B.A.Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972(訳者注：重みつき残差法と変分原理, 鷲津久一郎, 山本善之, 川井忠彦訳, 培風館). この主題の包括的取扱いに対して, W.Âmes, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2nd Ed., Academic Press, New York, 1977.

さて，同様に内挿を施して，内部の格子点でない点(x,y)での$u(x,y)$の近似値を求めたい．差分法を導いた議論の道筋をたどると，9個の正方形のそれぞれ上の$u(x,y)$の値を，すべての点かその数点で見出された差分による平均値が与える階段関数によって近似する．この例の場合，図2.6cに示される様な近似解になる(すなわち，高さが27/96，91/96，64/96，・・・)．

よりよい内挿，そしてデータfに関しても内挿に矛盾しないものは，区分的に線形，もっと正確にいうと，区分的に平面をなす内挿によって得られ，図2.6dはそれを示す．これは境界データと各内部格子点で見出される差分値の両方を，より良く調整する．この例ではいずれも厳密に調和している．用いた対角線の選び方に曖昧さが入るけれども，誤りを犯すことにならない．電算機の上で，幾つかの可能な配位を試みることができる．三個の点で三角格子を導入して平面が決定されるという事実は，本書の筋道からはかなり離れているけれども*)，有限要素法の特徴であり，今ここで述べたスキームがその一つの例である．

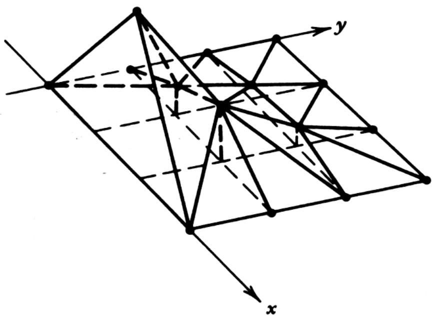


図2.6d

さて，これらの近似解は正しい解$u(x,y)$に収束するだろうか？　この疑問に答えるには，収束ノルムを少々変形させる必要が生ずるが，ここでは変分的な扱い方に関係するエネルギーノルムに制限して考えよう．

次の段階での鍵はDirichlet(変分)原理(節1.5.3と節1.9.5(3)参照)にもどることで，それは次を主張する．すなわち，Dirichlet問題(図2.6e)

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上} & u=f \end{cases}$$

は，$\partial\Omega$上で値fをもつすべての関数vについて，エネルギー関数$D(v)=\int_{\partial\Omega}|\mathrm{grad}\ v|^2$を最小にする関数$u$によって与えられる．

*) より複雑なあるいはより高次の問題では，境界に依存する長方形または他の形の格子へ，および“スプライン”の理論へと進むべき区分的に高次の多項式の内挿を用いたい．

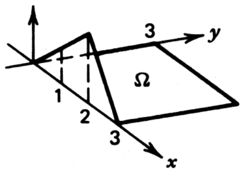


図2.6e

実際，1次元の場合について節1.5.3で示した様に，また高次元でも全く同様にして示される様に(問題2を参照)，適当に部分積分して，任意の好適な領域Ω上のDirichlet問題に対する解uは次の極小化の性質をもつことが直接示される*).

$$D(u) \leqq D(v), \qquad v=f\ (\partial\Omega \text{上})$$
(vは部分積分法に対して十分に滑らか).

合理的に考えられる最大の可能なクラス$\{v\}$をとることによって，うまく極小化することは，変分法の典型である．$D(v)+\int_\Omega|\mathrm{grad}\ v|^2dx$の場合，これは2乗可積分な1階偏導関数をもつ$L^2(\Omega)$の関数$v$のクラスを意味する．このクラスは，例えば，$C^1(\Omega)$級の関数とそして更に，2乗可積分な1階の超関数的導関数をもつ多くの他の関数を含む．特に弱い意味のあるいは超関数的導関数に関しては，問題1.9.7の議論を見よ．この様な関数 $\{v\}$ の空間は**Sobolev空間**

$$H^1(\Omega)=\left\{\ v\in L^2(\Omega)\text{かつ}\frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^2(\Omega), \qquad i=1,\cdots,n\right\}^{\dagger)}$$

と呼ばれ，内積

$$(u,w)=\int_\Omega uw+\int_\Omega \mathrm{grad}\ u\cdot\mathrm{grad}\ w$$

*)　より困難な部分は別のところにあって，

$$D(u)=\underbrace{\min}_{\partial\Omega\text{上}v=f}\ D(v)=\underbrace{\text{infimum}}_{\partial\Omega\text{上}v=f}\ D(v)$$

によって決められる変分的解uが実際に存在し，更にuがC^2級でかつ$\Delta u=0$であることを示す点にある(問題1.9.5(3)を見よ)．これを示すには，より深い注意を必要とし，特にどの様なクラス上で下限が得られるのかを厳密に指定しなければならない．

†)　次の記法も用いられる：$H^{1,2}(\Omega), W^1(\Omega), W^{1,2}(\Omega)$．同様にして

$$H^2(\Omega)=\left\{\ v\in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_j}\in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\in L^2(\Omega)\right\}.$$

これは“2位の”Sobolev空間で，さらに“より高位の”Sobolev空間$H^m(\Omega)$も定義される．

と(2乗)ノルム*)

$$\|u\|_1^2=\int_\Omega u^2+\int_\Omega|\mathrm{grad}\ u|^2\equiv\|u\|^2+\|\mathrm{grad}\ u\|^2$$

をもつ．ここで$\|u\|$はL^2ノルムまたは値平均2乗ノルム $[\int_\Omega u^2]^{1/2}$のことである．uの適当な代表が連続となることは，1次元開集合Ωに対して，$H^1(\Omega)$の関数uの一性質である(休止第3回参照)．次元数nが2と3の場合，そこで関数の連続性を主張する$H^2(\Omega)$にならなければならない．同様の正則性の結果がより高次元の$H^m(\Omega)$でも成り立つ†)．

さてDirichlet原理によって(適当なデータfに対して，以下参照)，

$$D(u)=\min_{\substack{\partial\Omega上v=f\\ v\in H^1(\Omega)}} D(v)=\inf_{\substack{\partial\Omega上v=f\\ v\in H^1(\Omega)}} D(v).$$

データfを差し引くという別の立場で考えよう．さし当り，与えられたfはΩの到る処で既に定義された関数(例えば多項式)であると仮定する．このときDirichlet原理によって

$$D(u)=\inf_{v-f\in H_0^1(\Omega)} D(v)$$

ここで，

$$H_0^1(\Omega)=\{h\in L^2(\Omega),\ ただし\mathrm{grad}h\in L^2(\Omega)かつ\partial\Omega上でh=0\}.$$

さらにこれは$H^1(\Omega)$と同じノルムと内積をもつ．この(2乗)ノルムの主要部はエネルギー項

$$D(v)=\int_\Omega|\mathrm{grad}\ v|^2$$

であり，他の部分は‡)，簡単のためばかりでなく，ここでの考察でDirichletエネルギ

*) 便宜上，含まれる構成要素が明らかなとき，意味のあるノルム，2乗ノルム，または$D(u)$，$D(u)^{1/2}$等等を含む場合には今後，“ノルム”なる用語を勝手に用いることにしよう．

†) 実際，**Sobolevの補助定理**は，$H^{[n/2]+1+k}$のvが$C^k(\Omega)$級であると主張する．ここで，nは次元数，$[n/2]$は“整数に丸められた”ことを示す．よって次元数の増加に従って，そこでの関数の連続性を保証するために，より高位のSobolev空間をとらなければならない．

‡) これら二つのノルム(節1.6.2問題3と同様)$D(v)$と$\|v\|_1^2+D(v)$は，$H_0^1(\Omega)$のvに対して同値である．すなわち，$c_1D(v)\leqq\|v\|_1^2\leqq c_2D(v)$を満たす定数$c_1$と$c_2$が存在する．$c_1=1$ととってもよく，$c_2$はPoincaré不等式，すなわち，$\|u\|^2\leqq c_3D(v)$からわかる．このとき，定数$c_3$は$\lambda_1^{-1}$となる(節1.6.2問題2参照)．この問題の第1固有値λ_1は厳密に正であった．$H^1(\Omega)$(境界条件無し)に対しては，vが0でない定数のとき$D(v)=0$であるが，この事は本質的な困難を引き起こすことにならず，更に実用上現われる関数にも稀にしか現われない．この理論においても常に，困難なしに処理される(例えば，次の脚注を見よ)．

一積分の主たる役割りを強調したいがために，故意に省略された．

Dirichlet原理，直交射影の方法（これには最小２乗法，Galerkin法，Rayleigh-Ritz法その他が含まれる），有限要素近似の間の主要な結びつきはGreen等式を介して次の様に理解することができる．

任意の二つのC^2級関数hとw（および極限をとって，任意の$H^1(\Omega)$級関数のhとw)に対して，Green第一等式から

$$D(h,w)=\oint_{\partial\Omega} h\frac{\partial w}{\partial n}-\int_{\Omega} h\varDelta w.$$

$\partial\Omega$上で$h=0$であり，wが調和すなわちΩ上で$\varDelta w=0$のときには

$$D(h,w)=0.$$

$D(h,w)$は内積であるから*)，この式からhとwは互いに直交する，すなわち，この内積の意味で

$$h\perp w.$$

この事実は次のようにもかける．

$$H^1(\Omega)=H_0^1(\Omega)\overset{\perp}{\oplus}U(\Omega).$$

ここで，$H_0^1(\Omega)$は$\partial\Omega$上で消える$H^1(\Omega)$級関数の部分空間，Uは調和関数の部分空間である†)．

*) 再び簡単のため（前の脚注参照），定数関数を法としてすべての計算を進める．$u=c$（一定）のとき，$D(v)=0$，これは（専門用語として），ノルムに関して$D(v)=0$なら$v=0$であるという発想に抵触する．この点を避けるために，多くの研究者は作用素$\varDelta v$の代りに，$H^1(\Omega)$ノルムに厳密に“一致する”作用素$\varDelta v+v$を考える．これはそれでもかなり技巧的な面がある．本文で与えられた分解を用いて，定数関数はUにおいてそれら自身であり，Uの関数wはノルム$D(w)$に影響されることなく，実数だけ異なる．

†) 実際には，境界で消える関数hと調和関数wがエネルギー内積において直交する事実を，$H^1=H_0^1\oplus^{\perp}U$とかいては十分でない．なぜなら，それらの直和が全空間を埋めつくすことをやはり示されなければならない．この様に，UはH_0^1のH^1における直交補空間として定義し，よってH^1のすべてはその和において保証される．そのとき，Uの関数wが実際に調和であることが，次の様にして示される．hを任意のC_0^∞級“test関数”とし，wをH_0^1の直交補空間として定義されたUに属するとする．このとき$D(h,w)=0$，よってGreen第１等式からすべてのこの種のhに対して$\int_{\Omega} w\varDelta h=0$. 結局，弱いあるいは超関数的意味で$\varDelta w=0$（問題1.9.7を見よ）．この事は$H^1(\Omega)$級関数が調和であるということを示す．

さて，Dirichlet問題にもどって，境界データfは$H^1(\Omega)$級関数f_eとして領域Ωの中に延長され得る(問題2参照)と仮定しよう．上記直交分解によって，延長された関数f_eは

$$f_e(x)=h(x)\overset{\perp}{\oplus}w(x)$$

なる一意的な成分分解*)をもつ．ここで，$\partial\Omega$上で$h(x)=0$，Ω内で$\Delta w(x)=0$．$\partial\Omega$上で，$w(x)=f_e(x)=f(x)$となり，よってwはこのDirichlet問題の解である．

幾何学の言葉で述べると，解uはH^1に属するf_eの部分空間Uの上への射影として得られる．すなわち，

$$u=P_U^{H^1}f_e.$$

Dirichlet原理の有用な状況は図2.6fに示される．これは“最短距離が直線である”ことを示す．すなわち，$\{v\}=f_e+\{H_0^1\}$のvに対して†)

$$D(u)\leqq D(v).$$

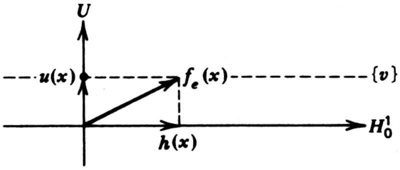


図2.6f

*）境界データfが定数のDirichlet問題は自明であるが，それが一定でないと仮定することもできる．このときwは一定でなく，前の脚注に関係した任意定数は0に等しいとしてもよい．

†）批判的で理知的な読者はこの点で，fの領域Ωの中への延長が全く一意的でなく，よってこの描像はこの点において不完全であると抗議するに違いない．しかるに，他にどんな延長f_e'でも，その様な延長がUで同じ調和成分をもつから，図2.6fに表された$\{v\}$の“点線”上のどこかで終るベクトルによって表現されるだろう．$f_e=h\oplus w$，$f'_e=h'\oplus w'$としよう．このとき，hとh'が共に$\partial\Omega$上で消えるから，

$$\begin{aligned}D(w-w')&=\oint_{\partial\Omega}(w-w')\frac{\partial}{\partial n}(w-w')ds\\&=\oint_{\partial\Omega}(f_e-f'_e)\frac{\partial}{\partial n}(w-w')dx\\&=\oint_{\partial\Omega}(f-f)\frac{\partial}{\partial n}(w-w')ds=0.\end{aligned}$$

よって，上の描像において，$w=w'=u$.

今までの考察をまとめておこう．本節はDirichlet問題の解を数値的にどの様に近似するかという疑問から出発した．差分法がまず考えられ，次にかなり自然な形で，それを有限要素法に移行させた．それは収束性の疑問，または別のやり方による任意の近似における誤差評価の問題に帰着させた．誤差を見積もるには，ノルムが必要であり，そのノルムによってDirichlet原理へ帰着させた．すなわち，uをDirichlet問題の解，v_Nを解の第N近似とすると，“エネルギー”における誤差は次式で与えられる．

$$D(u-v_N)=\int_\Omega |\mathrm{grad}(u-v_N)|^2 dx$$

v_Nとして例えば，解に対する逐次細分化差分の，または有限要素の近似であるとることもできよう．あるいは(もっと変分的に)Dirichlet原理に従う極小化列である様にv_Nをとってもよい*)．v_Nをどう選んでも，収束性の疑問は残り，それに関してエネルギーノルムが誤差の一つの測度として用いられる．

もっと一般的に，任意次元の空間で任意の有界な領域Ωに対するDirichlet問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上} & u=f \end{cases}$$

は差分，有限要素そして次に収束性の考察を介して，ここで議論したと同様にして，(順を追って)数値的に進めることができる(図2.6g)．差分法で，内部の点の格子での近似解が知られる．有限要素法で，格子線上を除く任意の点で

$$\Delta u_{\text{近似}}=0$$

を満たす近似解による内挿を与える．Dirichlet原理によって，図2.6hに示される様な変分的処方で解を近似して収束性の証明が与えられる．

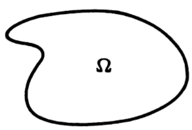


図2.6g

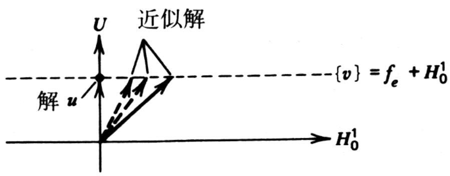


図2.6h

*) 図2.6fから明らかな様に，Dirichlet原理は時には**直交射影の方法**と呼ばれる．しかし後者はより一般的でかつ変分的であることを必要としない．そしてそれ自身，最良の最小2乗あてはめの方法と呼ばれるやはりより一般的なHilbert空間近似の特殊な場合である．この方法は統計学その他さまざまに適用され，それ自身Fourier級数の(基本的であるけれども)一つの立場に立っている．偏微分方程式に適用されたとき，特に含まれる射影や作用素が必ずしも自己共役でないとき，後者の方法はしばしば**Galerkin法**と呼ばれる．固有値を近似するときの自己共役の場合は**Rayleigh-Ritz法**と呼ばれる．

本節を終える前に，Dirichlet原理と変分法を最良の最小2乗近似の一般的方法に関係づけたい．前二者は後者の特殊な場合なのである．

作用素方程式*)

$$Lu=F$$

に対する任意の最小2乗近似の方法の一般的な発想は，適当な†)Hilbert空間に節2.3の定理Hの意味で極大正規直交集合 $\{\varphi_n\}$ を選び，解uを部分和

$$u_n=\sum_{n=1}^{N}c_n\varphi_n$$

によって近似することである．ここで係数c_nは条件

$$\langle Lu_N-F,\varphi_m\rangle=0,\qquad m=1,2,3,\cdots,N$$

によって決定される．P_Nを$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$の張る空間の上への射影とするとき，これは

$$P_N(Lu_N-F)=0.$$

すなわち，近似する部分空間の上へ“射影された”とき，この作用素方程式‡)が近似的に解けるだろうことを要求することに相当する．$\{\varphi_n\}$は極大であったから，$N\to\infty$のとき$P_N\to I$となり，このP_Nと作用素Lがどの位うまく“可換である”かに応じて，このu_Nが解に収束すると期待できる．なぜそうなるかについて少々論じておこう⁑)．簡単のため，作用素Lが連続§)，すなわち，ある数Mが存在して，

$$\text{すべての}w\text{に対して}\qquad \|Lw\|\leqq M\|w\|$$

となる事が可能であると仮定する．すべてのこの種のMの下限は作用素Lのノルム$\|L\|$と呼ばれる．更に，射影P_Nが対称であることと，Lが**強正値**である(**強圧的**とも呼ば

*) あとでDirichlet問題に再びもどることにするけれども，初めにPoisson問題(Ω内で$-\Delta u=F$，$\partial\Omega$上で$u=0$)を考えることは恐らく有益であろう．ここで用いられる幾つかの概念については，問題2.9.5も見よ．

†) “適当な”Hilbert空間を見出すことは，時にはごまかしである．

‡) 作用素方程式が偏微分方程式であるとき，ロシアの数学者Galerkinにちなんで，しばしばGalerkin法と呼ばれる．

⁑) この議論は実際数値解析では基礎的なものである．$\{\varphi_n\}$が極大である事実は**無矛盾性**と呼ばれる．射影作用素が一意的に可逆である事実は**安定性**と呼ばれる．偏微分作用素はHilbert空間において連続でない(けれども，超関数の理論へ移行させることによって，他の空間で連続にならしめることが可能である．それには，幾何学にある種の犠牲を払ってなされる)．積分作用素及び行列作用素は，Hilbert空間ノルムでしばしば連続である．

§) 連続な，すなわち有界な作用素の議論については，問題2.9.5を見よ．ここでの議論では実際，LもL^{-1}も共に連続作用素であると仮定されている(後者はLの強正値性による，問題2.9.5(b)を参照)ことに注意せよ．

れる)ことを仮定する．すなわち，ある数$m>0$が存在して

$$\text{すべての}w\text{に対し}\qquad (Lw,w)\geqq m\|w\|^2$$

とできる．このとき，収束性の議論は次の様になる．

先ず，$\{\varphi_n\}$が極大であるとき，上に述べた様に，任意のuそして特に解uに対して，

$$\|u-P_Nu\|\to 0$$

が成り立つことに注意する．先の射影方程式は

$$P_NLP_Nu_N=P_NF$$

とかいてもよく，これから最小２乗近似のu_Nが

$$u_N=(P_NLP_N)^{-1}P_NF$$

として得られる．ここでの逆演算は，Lの仮定された強正値性，P_Nの直交性(すなわち対称性)およびSchwarz不等式によって，まず，次の不等式が保証される*)．

$$\begin{aligned}\|w\|\|P_NLP_Nw\|&\geqq \langle P_NLP_Nw,w\rangle\\&=\langle LP_Nw,P_Nw\rangle\\&\geqq m\|P_Nw\|^2.\end{aligned}$$

この最後の不等式は，特にP_Nの値域内にあるwすなわち，$\varphi_n(n=1,\cdots,\ N)$の張る空間に属する$w$に対して，$P_NLP_Nw=v$なら$w=(P_NLP_N)^{-1}v$であり，更に

$$\|w\|\leqq\frac{1}{m}\|(P_NLP_N)w\|.$$

この様に，射影作用素P_NLP_Nは主張されたP_Nの値域内で可逆であり，

$$\|(P_NLP_N)^{-1}\|\leqq\frac{1}{m}$$

によって(Nについて一様に)有界な逆をもつ．従って，$P_Nu=(P_NLP_N)^{-1}(P_NLP_N)u$および$u_N=(P_NLP_N)^{-1}P_NF$とかけるので，

*)　これは作用素を扱う際のむしろ標準的な技法といえる．強正値作用素(例えば，適当な境界条件をもつ楕円型微分作用素)は常に，この議論によって有界な逆をもつ．また，P_Nが直交射影のとき$\|P_N\|=1$に注目しよう．更に，これらの議論で作用素の合成をとるとき，結局領域$D(L)$について注意することはなかった．前の脚注でも述べた様に，Lは微分作用素のとき通常有界でない．それにもかかわらず適当に調整することによって，上の議論は微分作用素に対して数値的に収束性を考えるとき，普通のものとなる．$L=\varDelta$は例えば，H^2ノルム$\|u\|_2^2=\|u\|^2+\|\mathrm{grad}\ u\|^2+\|\varDelta u\|^2$を用いると有界作用素となるけれども，そのとき，射影の正値性や扱い易さなどの，上で与えられた簡略化の議論で要請された他の性質が失われる．

$$\begin{aligned}\|u-u_N\| &\leqq \frac{1}{m}\|P_NLP_Nu-P_NF\|+\|(I-P_N)u\| \\ &\leqq \frac{1}{m}\|LP_Nu-Lu\|+\|(I-P_N)u\| \\ &\leqq \left(\frac{\|L\|}{m}+1\right)\|P_Nu-u\|\to 0.\end{aligned}$$

よって収束性に関する所要の結論を得る．

上の一般的方法を解説するため，Dirichlet境界条件をもつPoisson問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & -\varDelta u=F, \\ \partial\Omega\text{上} & u=0 \end{cases}$$

を初めに考えよう．Ωは有界かつ好適であると仮定する．すなわち，与えられた作用素Lに対する可算個の固有関数$\{\varphi_n\}$が存在して，今の場合，Ω内で$-\varDelta\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$と$\partial\Omega$上$\varphi_n=0$を満たす．初めの$N$個の固有関数の線形部分空間$sp(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$の上への$H=L^2(\Omega)$射影を$P_N$とする．集合$\{\varphi_N\}$は節2.3の定理Hの意味で極大正規直交集合である．このことは，節2.4で与えたSturm-Liouville理論に似た高次元におけるより深い考察から示される．作用素Lはまた

$$\langle Lu,u\rangle=-\int_\Omega \varDelta u(x)u(x)dx\geqq\lambda_1\int_\Omega u^2(x)dx$$

と対応する固有値問題の第一固有値λ_1の正値性とから知られる様に，強正値である．$u_N=\sum_{n=1}^N c_n\varphi_n$とおくと，方程式

$$P_NLP_Nu_N=P_NF$$

は

$$\sum_{n=1}^N c_n\lambda_n\varphi_n=\sum_{n=1}^N d_n\varphi_n.$$

ここで，データFは，固有関数φ_nによるFourier展開を用いて，$F=\sum_{n=1}^\infty d_n\varphi_n$とかかれた．よって，$c_n=d_n/\lambda_n$．$L$の強正値性によって，連続な逆作用素$L^{-1}$が存在し，よって直接収束性を示すことができる，すなわち

$$\begin{aligned}u=L^{-1}F=L^{-1}\sum_{n=1}^\infty d_n\varphi_n &= L^{-1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N d_n\varphi_n \\ &=\lim_{N\to\infty}L^{-1}\sum_{n=1}^N d_n\varphi_n \\ &=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\frac{d_n}{\lambda_n}\varphi_n=\lim_{N\to\infty}u_N.\end{aligned}$$

これはLの値域内ですべてのデータFに対して成り立ち，後者は実際$L^2(\Omega)$のすべてである(問題2.9.5(d)参照).

この例から，次の三つの注意を喚起しておきたい：

(i) $c_n = d_n/\lambda_n$ととれるためには，この場合Galerkin法が厳密にFourierの方法であることを認めなければならない.

(ii) また，多くの領域Ωに対して，φ_nを陽的に見出すことはできないだろう．この点にも，注意すべきである．その様なとき，標準的に，φ_nのある近似の，または近似手続きのため他の基底ψ_nの使用が強いられるだろう.

(iii) 最後に，上のPoisson問題に対する収束性の証明は，$L^{-1}P_N = P_N L^{-1}$であるから可能であった点に注意しよう．前述の例では，真の固有関数φ_nでないある不正確な，または便宜的なφ_nを用いなければならなかったので，作用素LやL^{-1}と射影P_Nとの厳密な可換性が成り立たなかった．交換関係$LP_N = P_N L$は，上のPoisson問題のときと同様，Lの連続性に関係なく，収束性を与えることにも注意しよう.

一般の最小２乗近似法の解説の第二例として，任意の固有値問題

$$Lu = \lambda u$$

を述べよう．この問題および任意の選ばれた$\{\varphi_n\}$に対して，Galerkin方程式は$N \times N$の系

$$\langle (L-\lambda) u_N, \varphi_m \rangle = 0, \quad m = 1,2,3,\cdots,N$$

になる．ただし$u_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$であり，上の方程式系から係数$c_n$が決められる．$L$が自己共役のとき，この方法は通常Rayleigh-Ritz法の名称で呼ばれている．これは応用上大変重要であり，非常に多く用いられている*).

最小２乗近似の一般的方法の三番目の解説例†)として，次のDirichlet問題にもどろう.

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上} & u = f. \end{cases}$$

データfは，$\overline{\Omega}$上で定義され，かつ$H^1(\Omega)$であるf_eに延長される．$\{\varphi_n\}$を$H_0^1(\Omega)$に属する極大正規直交集合とする．この事は常に，階段関数を滑らかにしてC_0^∞級関数とし，次に，問題2.9.3や2.9.4と同様正基直交化することによって整理され得る．ここで勿論ノルム$D(w)$が用いられる．$\varphi_1,\cdots,\varphi_N$の張る空間の上への$H^1(\Omega)$の射影を$P_N$とする．作用素$L$はここでは何だろうか？それは二つの部分から成っている．Ω全体

*) 例えば，次を見よ．H.F.Weinberger, *Variational Methods for Eigenvalue Approximation* (SIAM, Philadelphia, 1974).

†) 読者はここで述べられた事柄に関して，細部を埋めて欲しい．本節末尾の問題３(c)を参照.

に適用されたラプラシアンΔと$\partial\Omega$上の恒等作用素で，同時にデータも二つに分けて，Ω内で0と$\partial\Omega$上fである．ここで，（特にこの場合に限って見掛け上明らかに）

$$u_N = f_e - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$$

ととり，

$$\langle \Delta u_N, \varphi_m \rangle = 0, \quad m = 1, 2, \cdots, N$$

によって決められた係数c_nを要求すると，想像上少なくとも上の一般的な方法に従って，u_Nが"境界上の等式を近似し"，ここで与えた直交性の条件は，Ω上で0データFの場合に適用されたとして，一般Galerkin係数決定法の手続きとなる．

すなわち，作用素の言葉で，H_0^1において$P_N \to I$および$P_N \Delta u_N = 0$を要請している．これは領域データ0の場合に対するGalerkinの前提である．

この事から，$c_m = D(f_e, \phi_m)/D(\phi_m, \phi_m)$が容易にわかる．更に

$$0 \leqq D(u_N - u) = D(u_N) - D(u)$$

が成り立ち，図2.6iに示された描像が得られ，（より一層判定のための計算を進めて）$\{u_N\}$がRayleigh-Ritz列を形成することがわかる．この列は実際，上から解uに収束する．すなわち，

$$D(u) \leqq \cdots \leqq D(u_{N+1}) \leqq D(u_N).$$

一般に，上からの任意のこの様な近似列は**Ritz列**とよばれる*)．

一般に，そして特に上記についての判定を完全にするために，Ritz列が次の様にして得られたことに注目しよう．$H_0^1(\Omega)$は可分であるから，$D(\varphi)$のノルムで$H_0^1(\Omega)$に属する多くの極大正規直交集合$\{\varphi_n\}$が存在する．P_Nを線形部分空間$sp\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$の上への射影とし，また$H_0^1(\Omega)$において，$P_N \to$恒等元に注目する．よって$H^1(\Omega)$で$P_N \to I - P$．ここで$P = P_u^{H^1}$は，前に注意した$H^1$の$U$の上へのDirichlet射影である．

$$u_N = (I - P_N) f_e$$

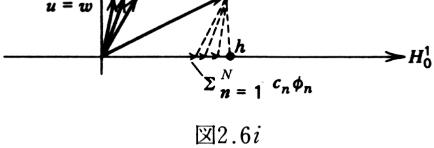


図2.6i

*）　あるいは数あるなかで，**Rayleigh-Ritz列**ともよばれる．

とおくと，$H^1(\Omega)$で

$$u_N \longrightarrow Pf_e \equiv u.$$

よって

$$D(u_N - u) \to 0.$$

Pythagorasの定理によって，このとき要請された上からの収束性

$$D(u_N) = D((I - P_N)f_e) \geqq D((I - P_{N+1})f_e) \geqq D(Pf_e) = D(u)$$

が得られる．

同様にして，下からの近似列を得ることができる．この種の下界列は，数ある中で**Trefftz列**と呼ばれる*⁾．$\{\varphi_n\}$ を$D(\varphi)$ノルムでUにおける極大正規直交集合とし，P_Nを線形部分空間$sp\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$の上への射影とする．よって$U$において$P_N \to$ 単位元であり，$H^1(\Omega)$で$P_N \to P$．

$$u_N = P_N f_e$$

とおくと，

$$u_N \to Pf_e \equiv u$$

となり，

$$D(u_N - u) = \oint_{\partial\Omega} (P_N f_e - u) \frac{\partial}{\partial n} (P_N f_e - u) \to 0$$

が成り立つ．Pythagorasの定理によって

$$D(u_N) = D(P_N f_e) \leqq D(P_{N+1} f_e) \leqq D(Pf_e) = D(u).$$

この様にして下からの収束性が得られる．

その他の近似列（たとえばH.A.Schwarz列やH.Poincaré列）は$D(u)$の上からと下から交互に収束させる．

問題 1 (a) 本節の初めに挙げた温度推定の問題で差分近似した 4 × 4 の線形系を確かめ，かつそれを解け．(b)データを区分的に線形な関数$f(x)$によって近似して，この問題を変数分離法によって解け．(c) $f(1, 0)$と$f(2, 0)$の値を（数倍に）変

*) 下界列より，すなわち，下から近似する列はしばしば(Thompsonの原理に対し)**Thompson列**とも呼ばれる．下界を得る一般的な方法はWeinstein-Aronszajn法である．(A.Weinstein and W.Stenger, *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues. Theory and Ramification* (Academic, New York, 1972)を見よ．)

えて，問(a)を繰り返せ．差分の値が容易にとられ得る気安さに注意せよ．
問題 2　(a)　ある適当な(すなわち，Dirichlet)領域Ω上の任意のDirichlet問題に対するDirichlet原理の逆命題，すなわち，節1.5.3で1次元に対して示したと同様に，問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上} & u=f \end{cases}$$

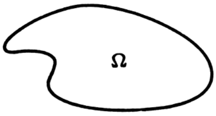


図2.6j

の解は，∂Ω上で$v=f$である“任意の”vに対して，性質

$$D(u) \leqq D(v)$$

をもつことを説明せよ．(b)“任意の”を読者自身の考えていることに関係づけよ．(c)$\partial\Omega \in C^m$および$f \in C^m(\partial\Omega)$に対して，$f_e \in C^m(R^n)$なる$f$の延長$f_e$が存在することを証明せよ．(d)∂Ω上の$f$の$f_e \in H^1(\Omega)$への延長に対する他の十分条件を研究せよ．
問題 3　Thompsonの原理を示せ．すなわち，すべての調和関数の間で

$$R(v)=2\oint_{\partial\Omega} f \ \ \partial v/\partial n-\int_{\Omega}|\mathrm{grad}\ v|^2$$

を極大にするのは，Dirichlet問題の解である．

休止　第4回：例題，説明，演習

節2.6でとられた変分法の設定によって，単独の理論的枠組の範囲内で，差分近似，有限要素近似，最小2乗(すなわちスペクトル)近似の基礎的な数値解法三つに注意を払った．差分近似は古典的な“絶対に確かな”方法である．精度を上げるために，実際には，網目間隔を細かくとる．

例題

節2.6の見本問題で，格子点間隔を1/2にして，精度の改善をはかれ．

解答　以前の網目$h=k=1$をより細かな網目$h=k=0.5$にとろう．6×6格子を25個の内部格子点に増やして，それを図4Paに示す様に番号付ける．同じ(中心差分の)近似を用いると，下記の25×25係数行列が得られる．右辺のベクトルはデータである．これは上で用いられた順序付けによる6バンド行列である．この行列方程式は通常のGauss-Jordan消去法で解かれて，下に与えられた解ベクトルを得る．

以下にここで用いられた25×25行列問題，右辺のデータ，解，およびこれらの結果(コーディング専門技術の検討なしに)を導いたコード*)を掲げる．

係数行列																									右辺ベクトル
4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.500
−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.000
0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.500
0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.000
0	0	0	−1.	4.	0	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.000
−1.	0	0	0	0	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	0	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	0	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	0	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	0	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0	−1.	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	0	0	0	0	−1.	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	0	4.	−1.	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	−1.	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1.	0	0	0	−1.	4.	0

解ベクトル

U(1) = .354779
U(2) = .684266
U(3) = .943837
U(4) = 1.022902
U(5) = .589059
U(6) = .234848
U(7) = .438447
U(8) = .568182
U(9) = .558712
U(10) = .333333
U(11) = .146168
U(12) = .266492
U(13) = .331731
U(14) = .310431
U(15) = .185562
U(16) = .083333
U(17) = .149621
U(18) = .181818
U(19) = .165720
U(20) = .098485
U(21) = .037544
U(22) = .066841
U(23) = .080201
U(24) = .072145
U(25) = .042657

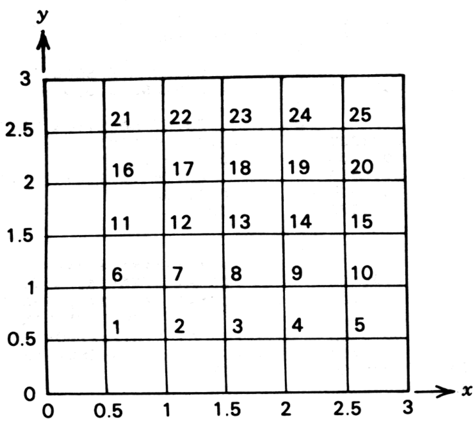


図4Pa.より細かな網目

*) 本書で与えた幾つかのコードは今やかなり古風であるが，本書の最初の目的とした解説のために，そのまま残しておく．

```
UNIVERSITY OF MINNESOTA FORTRAN COMPILER (VERSION 5.4 - 79/03/01) ON THE 6400 UNDER
KRONOS 2.1.0 ON 81/09/24 AT 19.52| UNIVERSITY COMPUTING CENTER - UNIVERSITY OF
COLORADO |
                    MNF(I=GAUSS,PL,BL)

                    C  **************************************************
                    C  * THIS PROGRAM CALCULATES THE SOLUTION OF THE DIRICHLET *
                    C  * PROBLEM IN A (3X3) SPACE DOMAIN BY MEANS OF A FINITE  *
                    C  * DIFFERENCE PROCEDURE. THE NUMBER OF INTERIOR MESH     *
                    C  * POINTS IS 25.                                         *
                    C  **************************************************
        000000B           DIMENSION C(25,25),D(25),U(25)
                    C
                    C     ...INPUT NUMBER OF INTERIOR MESH POINTS
        002131B           READ (5,108) N
                    C
                    C     ...SET COEFFICIENT MATRIX (C)
        003400B           DO 1 I=1,25
        003401B              DO 1 J=1,25
        003403B                 C(I,J)=0.0
        003403B         1 CONTINUE
        003413B           DO 2 I=1,24
        003415B              J=I+1
        003415B              L=I+5
        003417B              C(I,I)=4.0
        003421B              IF (I.LE.20) C(I,L)=-1.0
        003431B              IF (I.LE.20) C(L,I)=-1.0
        003436B              R=FLOAT(I)/5.
        003437B              IF (R.EQ.IFIX(R)) GO TO 2
        003442B              C(I,J)=-1.0
        003446B              C(J,I)=-1.0
        003450B         2 CONTINUE
        003453B           C(25,25)=4.0
                    C
                    C     ...SET RIGHT-HAND VECTOR (D)
        003454B           DO 4 I=1,25
        003456B              IF (I.LE.4) D(I)=0.5*FLOAT(I)
        003463B              IF (I.EQ.5) D(I)=1.0
        003466B              IF (I.GT.5) D(I)=0.0
        003471B         4 CONTINUE
                    C
                    C     ...PRINT COEFFICIENT MATRIX AND RIGHT-HAND VECTOR
        003473B           WRITE (6,101)
        003477B           DO 3 I=1,25
        003500B              WRITE (6,100) (C(I,J),J=1,25),D(I)
        003516B         3 CONTINUE
                    C
                    C     ...CALCULATE SOLUTION VECTOR (U)
        003520B           CALL GAUSS(C,D,U,N)
                    C
                    C     ...PRINT SOLUTION VECTOR
        003522B           WRITE (6,102)
        003525B           DO 5 I=1,25
        003526B              WRITE (6,103) I,U(I)
        003535B         5 CONTINUE
        003537B           STOP
                    C
                    C
                    C     *****************  FORMAT STATEMENTS  *****************
        003540B       100 FORMAT (/25(1X,F3.0),15X,F6.3)
        003540B       101 FORMAT (////37X,18HCOEFFICIENT MATRIX,58X,
                         1          17HRIGHT-HAND VECTOR//)
        003540B       102 FORMAT (1H1////60X,15HSOLUTION VECTOR//)
        003540B       103 FORMAT (/59X,2HU(,I2,4H) = ,F10.6)
        003540B       108 FORMAT (I5)
        003540B           END
```

呼び込まれたサブプログラムGAUSSは次のコードである．非常に大きな系(すなわち，非常に細かな網目)に対しては，他の線形ソルバを用いた方がよい．

変数分離解

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{(n^2\pi^2\sinh n\pi)}\sin\frac{n\pi x}{3}\sinh\left(\frac{(3-y)n\pi}{3}\right)$$

```
000000B          SUBROUTINE GAUSS(A,B,X,N)
           C  ***********************************************************
           C  * SOLVE UP TO 25 SIMULTANEOUS LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS *
           C  * BY GAUSS-JORDAN ELIMINATION METHOD                      *
           C  ***********************************************************
           C
000000B          DIMENSION A(25,25),B(25),X(25)
           C
           C     ...PERFORM MANIPULATIONS
000000B          DO 4 I=1,N
000002B             DO 2 K=1,N
000004B                IF (K.EQ.I) GO TO 2
000006B                CONST=-A(K,I)/A(I,I)
000014B                DO 1 J=1,N
000017B                   A(K,J)=A(K,J)+CONST*A(I,J)
000026B                   IF (J.EQ.I) A(K,J)=0.0
000033B        1       CONTINUE
000035B                B(K)=B(K)+CONST*B(I)
000041B        2    CONTINUE
000044B             CONST=A(I,I)
000047B             DO 3 J=1,N
000051B                A(I,J)=A(I,J)/CONST
000051B        3    CONTINUE
000057B             A(I,I)=1.0
000062B             B(I)=B(I)/CONST
000064B        4 CONTINUE
           C
           C     ...OBTAIN SOLUTION VECTOR
000067B          DO 5 I=1,N
000070B             X(I)=B(I)
000070B        5 CONTINUE
000074B          RETURN
000076B          END
```

の50項までの和を“解析解”と呼ぼう．そして，次表に示される比較がなされた．

	解析解	差分解 $h=k=1$	誤差 (%)	差分解 $h=k=0.5$	誤差 (%)
$u(1, 1)$	0.43051	0.45833	6.5	0.43845	1.8
$u(1, 2)$	0.14285	0.16667	16.7	0.14962	4.7
$u(2, 1)$	0.51732	0.66667	28.9	0.55871	8.0
$u(2, 2)$	0.15310	0.20833	36.1	0.16572	8.2

百分率誤差は，離散化長さhを半分にすると，約4分の1に減少する．これはこの方法が$O(h^2)$である事実，すなわち，hを半分にすると，誤差は1/4になることを実証している．

演習問題

1．上の問題を$h=k=0.75$におきかえて，試みよ．
2．最初$h=k=\pi/3$を用いて，節2.1問題2を解け．
3．$h=k=\pi/4$を用いるとどうなるか？
4．解析解の部分和を計算して，(3)における誤差を調べよ．
5．問題2の解の略図あるいはグラフを描け．

節2.6の他の重要なテーマ，解析的な変分的方法を振り返ろう．そこで見た様に，Dirichlet原理を固有の理論で理解するには，弱導関数あるいは超関数的導関数や$H^1(\Omega)$などの空間の概念を必要とする．節2.6で述べたSobolevの補助定理を一つの例として説明しよう．

例題

$H^1[0,1]\subset C^0[0,1]$を示せ．すなわち，その導関数について2乗可積分な関数uは実際に連続であることを示せ．

解答　$H^1[0,1]$が$H^1[0,1]$ノルムで$C^1[0,1]$の完備化である事実を用いる(これを確立するのに必要な議論については，節2.9.3参照)．これを認めると，次の上界を得る．

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C[0,1]} &\equiv \max_{0\leqq x\leqq 1}|u(x)|=|u(t_0)| \qquad (\text{ある}\ t_0\in[0,1]\text{に対して})\\
&=\left|u(s_0)+\int_{s_0}^{t_0}u'(\tau)\right| \qquad (u(s_0)=\min\ u\ \text{とする}\ s_0\in[0,1]\text{に対して})\\
&\leqq|u(s_0)|+\int_0^1|u'(\tau)|\leqq\int_0^1|u(\tau)|+\int_0^1|u'(\tau)|\\
&\leqq\left(\int_0^1|u(\tau)|^2\right)^{1/2}+\left(\int_0^1|u'(\tau)|^2\right)^{1/2}=\|u\|_{H^1[0,1]}.
\end{aligned}$$

さて，H^1の任意のuに対して

$$u_m\xrightarrow{L^2}u,\quad u'_m\xrightarrow{L^2}\quad(w\text{または}u'\text{などのある関数})$$

なるC^1級の列$\{u_m\}$が存在する．上の評価を用いて

$$\|u_n-u_m\|_{C[0,1]}\leqq\|u_n-u_m\|_{H^1[0,1]}\to 0.$$

よって，$\{u_m\}$はある連続関数vに一様に収束する．一方で，一様収束からL^2収束がわかり(節1.6.3参照)

$$\int_0^1|u_m-v|^2dx\leqq\max_{0\leqq x\leqq 1}|u_m-v|\to 0.$$

よってL^2極限の一意性によって，(殆んど到る所で)$u=v$．よって，H^1の範囲内で連続なvを選んでuを表現することができる．

演習問題

6.　弱導関数の概念を用いた別証によって，H^1級関数が実際に絶対連続であることを示せ．

7.　H^1級関数が連続可微分でないことを示す反例を作れ．

8.　$L^2[0,\ \pi]$のwと$\phi_n=(2/\pi)^{1/2}\sin nx\ (n=1,2,3,\cdots)$に対して，$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(w,\phi_n)\phi_n(x)$とする．$u(x)$は$(0,\ \pi)$上連続であることを示せ．

偏微分方程式の弱解は節1.9.5(3)で定義され，節1.9.7と節2.6で注目された．一般に，有限要素法の解や他の数値解は(たとえ網目を細かくするとか，要素の高位の差分をとるとか，級数の部分和の項を増やそうとも)弱解でない．

例題

図2.6dに示した“天幕関数”は弱解でないことを示せ．

解答　Ω上で局所可積分関数が$\Delta u=0$の弱解であるといわれるのは，$C_0^\infty(\Omega)$のすべてのtest関数ϕに対して$\int_\Omega u\Delta\phi=0$が成り立つときであった．関数$u$の平面的な部分を鉛直下方へ，$\Omega$上に射影しよう．これは$\overline{\Omega}$上の三角形を作るが，その形状は重要なことではない．

切りとられた長方形の一つの中に，対角線γの点x_0に中心をもつ半径rの球Bを置く．その台が図4Pbに示された陰影部にある様に，近似特性関数$\phi\in C_0^\infty(B)$を構成しよう．これは部分修正によって可能である(節2.9.3を参照)．

$u_i=u_{T_i}$とする．ここで，T_1とT_2は切りとられた長方形の二つの三角形部分を示す．二つの部分領域$i=1,\ 2$に対して，T_1とT_2それぞれの外向き法線について，次が成り立つ．

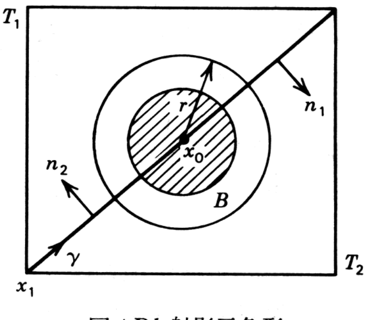


図4Pb.射影三角形

$$\int_{T_i} \Delta\phi u = \int_{T_i} \phi \Delta u_i - \oint_{\partial T_i} \phi \frac{\partial u_i}{\partial n_i} + \oint_{\partial T_i} u_i \frac{\partial \phi}{\partial n_i}$$
$$= \oint_{\partial T_i} \left(u_i \frac{\partial \phi}{\partial n_i} - \phi \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \right).$$

従って

$$0 = \int_\Omega \Delta\phi u = -\oint_{\partial T_i} \phi \frac{\partial u_1}{\partial n_1} - \oint_{\partial T_2} \phi \frac{\partial u_2}{\partial n_2}$$
$$= \int_\gamma \phi \, \mathrm{grad}(u_2 - u_1) \cdot n_1.$$

なぜなら，対角線γに沿って$u_1 = u_2$, $n_1 = -n_2$に注目すると

$$\oint_{\partial T_1} u_1 \frac{\partial \phi}{\partial n_1} + \oint_{\partial T_2} u_2 \frac{\partial \phi}{\partial n_2} = \int_\gamma u_1 \frac{\partial \phi}{\partial n_1} - \int_\gamma u_2 \frac{\partial \phi}{\partial n_1} = 0$$

が成り立つからである．区分的に線形な天幕関数に対し$\mathrm{grad}(u_2 - u_1) \cdot \overrightarrow{n_1}$は一定であり，修正特性関数として選ばれた$\phi$に対して$\int_\gamma \phi \neq 0$であるから，$\mathrm{grad}(u_2 - u_1) \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$. $u_1 = ax + by$, $u_2 = \alpha x + \beta y$として，$(\alpha - a, \beta - b) \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$. $\overrightarrow{x_0}$と$\overrightarrow{x_1}$がu_1平面とu_2平面の交線のもとにあるので，$(\alpha - a, \beta - b) \cdot (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_1}) = 0$．ところで，$\overrightarrow{n_1}$と$\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_1}$が直交し，よって必然的に$(\alpha - a, \beta - b) = 0$，すなわち，$\alpha = a, \beta = b$．すなわち，$\Delta u = 0$の唯一の区分的に平らな連続な弱解は平面である．

演習問題

9.(*a*)　上の着想は，$\Delta\phi$がすべての$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$を動くに従って，条件$\int_\Omega u \Delta\phi = 0$が非常に強いということである．なぜなら，後者は$L^2(\Omega)$で稠密である．$\Delta\phi$が稠密な集合を作るとは結論できないが，$u$に対して許される残りの部分空間は実際小さいものである．この事を1次元で確かめよ．

(*b*)　$e^{-x^{-2}}$はC^∞であるが，解析的でないことを示せ．

(*c*)　次の関数がC_0^∞級で，台〔-1，1〕をもつことを示せ．

$$j(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right), & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geqq 1. \end{cases}$$

節2.6とこの休止第4回で，楕円型偏微分方程式に対する数値的解法を議論した．問題2.9.6で，放物型方程式を数値的に解くための前進法(すなわち，ODE法)を与える．また，そこでは油の二次回収における重要な微分方程式，Buckley-Leverett方程式が述べられる．この方程式と関連する方程式の解法は，楕円型，放物型，双曲型の数値的方法を組み合わせる必要があり，それらの進展に拍車をかけている．

電算機に頼る立場からの数値的方法へのより完璧な導入は第3章付録Bに述べられており，教授者や読者の選択にまかせる．そこに含まれているものは，本書で既に解析的に研究された次の問題の電算解が見出される．すなわち節1.2問題1；　節1.9.6(2)c(1,000,000項まで計算されたGibbs効果)；節2.1問題1，2，3；　節2.9.8(i)(交通流の問題)．

さらに，電算動力学における最近得られた幾つかの結果が第3章で説明される．休止第6回で，衝撃波捕捉法の要点を述べる．付録Cで，全(粘性)Navier-Stokes方程式を手短かに考察する．

2.7　幾つかの非有界領域の考察(および連続スペクトル)

非有界領域を扱うとき，偏微分方程式は少々異なる考察を必要とする．本節では，これらの新しい特徴の幾つかを考えたい．節2.8で，非有界領域に現われる特別に重要な問題，散乱理論の問題を概観する．

特に本節では，Fourier変換に帰着される次の自然な移行を力説したい．

非有界領域Ω 特に全空間の領域	$\Longrightarrow$	PDEに対する連続スペクトルλの出現	$\Longrightarrow$	(擬)固有関数φ_λを用いた任意関数のFourier変換表現

始める前に，変数分離法，Green関数法，変分的方法の三つの基礎的な解法を振り返ろう．

非有界領域に対して，可算個の2乗可積分な固有関数をもはや期待できないので[*]，変数分離法は用いられない．所で，“非可算個の固有関数”を要するために，Fourier級数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$をFourier積分$\int c_\lambda\varphi_\lambda$によっておきかえる．それは全く簡単とはいいかねるが，Fourier変換が現われ，それを用いることにより，実際変数分離法を空間全体の非有界領域Ω(＝n次元Euclid空間E^n)に拡張，適用されたものとみなされ得る．同様にして，Laplace変換が，特に初期値問題や半空間のΩの問題に対して用いられる．任意の非有界領域に対して，Fourier積分法もLaplace積分法もともに厳しい制限がつけられる．後者の事実は，Fourier級数に対して同様の制限が現われたから，驚くに当らない(不規則な形状をもつ領域に対して，厳密な固有関数がどのようにして見出されたか想起せよ)．

非有界領域Ωに対して，問題に対するGreen関数はしばしば存在するし，時によると具体的に見出されることもある[†]．それらの場合に，幾つかの例でみられる様

*)　これは，例えば分離常微分方程式が無限区間上の特異Sturm-Liouville型のものであるとき，“極限円”にあるか，“極限点”にあるかに依存する．(節2.4，節2.9.4を見よ．)

†)　実際，本書の始めの節1.2問題2で非有界領域を取扱った．しかし，どの様にしてGreen関数が見出されただろうか？

に，Fourier変換の適用に十分な注意が払われなければならないけれども，その方法はすぐれたものである．Green関数を見出すのに，Fourier変換の利用が時には必要である．

非有界領域に対して，時には変分的方法が用いられることがある．実用上，それらの形式的適用でさえもしばしば，物理学的に重要な結果を生じる．けれどもそれらの正当性や収束性の証明は，“コンパクト性”を失うことにより，一般に困難である．後者は時には，ある種の汎関数の凸性やより下位の半連続性の議論によって，おきかえることができる．

非有界領域についての困難の幾つかは，局所的に考えてすなわち，与えられた領域Ωの有界な部分領域上で考えることによって克服される．偏微分方程式の最近の理論の多くは，まさにこれを主題とする．多くのこの種の扱いは一般的な解の存在証明になっているが，具体的な構成は一般に与えられていない．

次の三つの小節で考察を進めよう．(1)要約および初期の研究．既に知られているかまたは期待され得るものを数え上げる．(2)連続スペクトル．作用素のいわゆる点スペクトルとしての固有値λ_nの立場から，また偏微分方程式

$$(L-\lambda)u=f$$

が適切でない様な他のλとしての連続スペクトルλの立場から，初等スペクトル理論の幾つかの局面を議論する．(3)Fourier変換．Fourier変換が，点スペクトルの場合にFourier級数が果たしたと同じ役割を，方程式を連続スペクトルについて“積分する”ことで演じている．これらを極めて簡潔にみておこう．

2.7.1　要約および初期の研究

考えをまとめ，非有界領域上の問題に対する多少予備的な直感を展開させるために，ここで一息入れて，既に利用し得るものとなった経験を集め，(少なくとも当初の基礎の上で)幾つかの外部領域問題を考えよう．

まず，本書で考えた最初の問題——Dirichlet問題(節1.2参照)——をとり上げよう．簡単のため，1次元の場合で考える．Ωとして区間$(-1,\ 1)$をとり，境界条件は$u(-1)=a, u(1)=b$とする．この解は図2.7aに示される．外部問題，すなわち，Ωとして区間$[-1,\ 1]$の外側で，同じ境界条件$u(-1)=a$，$u(1)=b$をもつ問題は，全く異なって一意的な解は得られない(図2.7b)．この様に，外部領



図2.7a

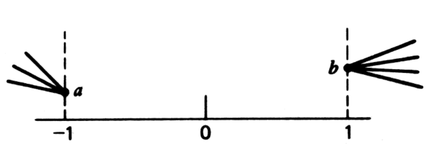


図2.7b

域の問題で$\partial\Omega$は無限遠点も含むことに留意して，適切な問題を得るために，$x=\pm\infty$で適当な境界条件が必要となる．目下考えている1次元問題では，$x=\pm\infty$においてDirichlet問題でなくNeumannに問題を要請することに注意しよう．そしてΩ上で2乗可積分な解は，決して存在しない*)．

本書で考えた二番目の問題，すなわち，$-\infty<x<\infty$および$t>0$に対する熱伝導の初期値問題は，既に述べた様に，非有界領域問題であった．tについての非有界性が実際に存在するけれども，変数分離法で解いたとき有限区間〔a,b〕内のxに対する熱伝導の初期値境界値問題で見られ，また最大値原理(節2.2参照)を介して一意性を示したとき見られた．t-非有界性(これは型に関係なく初期値問題には常に存在する)は非有界領域問題の識別因子ではない．むしろ，問題はx-変数についての領域Ωが有界であるか否かなのである．例えば，節1.3問題2の非有界領域$-\infty<x<\infty$に対する一意性や安定性の議論は，たとえPoisson核Green関数を用いて解の存在が示され，陽的な表現が与えられたときですら，領域の非有界性に起因して，より困難になる．

さて，本書で考えた第三問題，すなわちRayleigh固有値問題に対して外部領域での考察にもどろう．初めに，長さ$2l$の内部領域上の問題

$$\begin{cases} -u''(x)=\lambda u(x), & -l<x<l, \\ u(-l)=u(l)=0 \end{cases}$$

を考えよう．正規化因子を除いて，固有関数は

$$u_n(x)=\cos\frac{(2n-1)}{2l}\pi x,$$

ただし

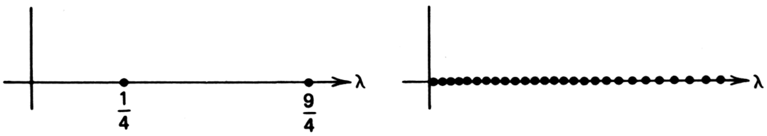
$$\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$$

$l\to\infty$としよう．(図2.7cに示される様に)固有値は各nに対して0に近づき，同時に増大する区間(0，l)を埋め尽すようになる．更に，固有関数のノルムの2乗

$$\|u_n(x)\|^2=\int_{-1}^{1}\cos^2\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx=l$$

*) Ωが単位球の外部である次元数2以上のDirichlet問題は実際，これらの場合のΩの連結性やより高次元で現われる非常に数多い調和関数の組み合わせによって，多少なりとも扱い易くなっている．けれども，2乗可積分性は失われる．本小節末尾の問題1や次小節の問題1を見よ．

は$l\to\infty$に従って発散する．



(i) $l=\pi$　　(ii) $l=100\pi$

図2.7c

この最後の例を少々詳しく考えよう．また，先の外部Dirichlet問題の様な，区間〔$-l,l$〕の外部のΩを考えるとき，よく行われている外部(非連結)領域の考察に立ち入るよりは，むしろ全空間の問題

$$\begin{cases} -u''(x)=\lambda u(x), & -\infty<x<\infty, \\ u(\pm\infty)=0 \end{cases}$$

を考えよう．無限遠点でのDirichlet境界条件$u(\pm\infty)=0$が，節2.6と同じくSobolev空間を介して，実際にこの作用素の領域でその関数を用いてより的確に指定され得る．しかし，当分はそれ無しですまし，uが十分に良好で，部分積分法によって，問題の任意の非自明解に対し

$$\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}(u')^2dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}u^2dx\geqq 0$$

が通常の様に主張されるか否か(問題2参照)のみを問うことにしよう．このとき，初等的な常微分方程式の議論からその解は

$$\begin{aligned} u_\lambda(x)&=c_1\sin\lambda^{1/2}x+c_2\cos\lambda^{1/2}x, & \lambda>0, \\ u_0(x)&=c_1+c_2x, & \lambda=0 \end{aligned}$$

であることが知られ，直ちにこの問題が$\pm\infty$で0をとる非自明解をもたないことがわかる．更に，それらの解のどれも，$\pm\infty$で0に近づこうが近づくまいが，$\Omega=(-\infty,\infty)$上で2乗可積分でない．

その上，この最後の例を更に深めて，$u_\lambda(x)$は明らかにRayleighの微分方程式を満たす固有関数である．考えている微分固有値問題を満たすが，その問題の決定されている2乗可積分関数のL^2空間の値域に属さないこれらの固有関数は**擬固有関数**と呼ばれる．後で示される様に，相違する重要な内容の術語を用いても，それらが束縛状態でなく散乱状態を，振動でなく放射を，点スペクトルでなく連続スペクトルを述べていることを除けば，それらに関して不適当なものは何もない．

一層進んだ要約や概説は，非有界領域と連続スペクトルに関連して現われることになるので，次の小節で触れることにする．

問題 1． ΩをR^3における単位球の外部とする．すなわち$\Omega=\{x=(x_1,x_2,x_3)|x_1^2+x_2^2+x_3^2>1\}$．$(a)\Omega$で$\Delta u=0$，境界条件としてDirichlet,Neumann,Robinの各条件をもつ問題の，Ωにおける解の一意性を考えよ．対応する内部問題での一意性を考えたときと同様，部分積分法が可能であると仮定せよ．(b)問(a)で用いられた“∞での境界条件”をかき下ろせ．uについて，どの様な正則性が仮定されたか？ (c)最大値原理または任意の他の“内部問題”の一意性の技法を用いることができるか？

問題 2． (a)本文で考えた問題，すなわち，$\Omega=(-\infty,\infty)$において$-u''(x)=\lambda u(x)$に対し$\lambda\geqq 0$を保証するのに$x=\pm\infty$で必要なuに関する条件を厳密に述べることを試みよ．(b)固有関数は対称すなわち偶関数であると信じてよいか？(c)問(a)で，$\Omega=(0,\infty)$とした左側境界条件$u'(0)=0$に関係して，同じく考えよ．

問題 3． 一般的に興味があるのは，解の対称性の問題で対称領域が有界であろうとなかろうと，また問題が線形であってもなくても，上述の問題を越えて議論される．

(a)上の問題2(a)に対して，解の対称性に関する疑問が常微分方程式に対する複素数値解$e^{\pm i\lambda^{1/2}x}$と，どの様に関係づけられるかを示せ．

(b)非線形固有値問題，$-1<x<1$上で$-u''=\lambda f(u)$,$u(-1)=u(1)=0$は唯一つの対称解をもつことを示せ．fは正値かつ連続であると仮定せよ．

(c)領域を$-\infty<x<\infty$に拡張し，$\pm\infty$で適当な境界条件を与えて，問(b)を試みよ．

(d)問(b),(c)が“非自励系の”方程式$-u''(x)=\lambda\rho(x)f(x)$に対しても，同様に成り立つかどうか研究せよ．ここで，$\rho(x)$は好適な正値連続重み関数である．

2.7.2 連続スペクトル

非有界領域に関する問題は，連続スペクトルと呼ばれるものの例題を直接提供してくれる．今まで扱ったFourier級数や変数分離法において，点スペクトル(例えば，固有値λ_n)のより平易な場合について根本的に考えてきた．

本節では，これらの用法を精密化したい．何故なら，それらは微分方程式およびより抽象的な作用素論の殆んどに関係するからである*)．ここでは既になじみのある

*) 歴史的には，微分方程式がまず先行し，従って幾分かの説明のもとで，まずそれらが述べられなければならない．もっと抽象的な理論(いわゆるスペクトルの理論)が明瞭になりつつあるが，必ずしも偏微分方程式の具体的な解に対して必要ではない．十分に展開しないが，スペクトル論の根本的要素の幾つかを述べることが，ここでの試みである．より完全な議論に対して，非常に多くの文献があるけれども，読者に次の著書を挙げておく．古典的なものとして，F.Riesz and B. Sz.Nagy, *Functional Analysis,* Ungar,New York,1955(訳者注：関数解析学(絹川正吉，清原岑夫訳)，共立出版)；百科全書的なN.Dunford and J.Schwartz, *Linear Operators,* I，II，III (Wiley-Interscience,New York,1958, 1963, 1971)．

作用素を用いてそれらを説明しよう．

次の方程式を考えよう．

$$Lu - \lambda u = f. \tag{\#}$$

ここで，λは実数または複素数である．(#)が適切であるとき，すなわち節1.3によって，(#)が解の(1)存在，(2)一意性と(3)安定性の良好な性質すべてをもつとき，λはLの**レゾルベント集合**$\rho(L)$に含まれるといわれる．そのとき，この問題は完全に解明され得る．任意の閉作用素(問題2.9.2参照)に対するレゾルベント集合が複素平面の開部分集合であることは，容易に示される．レゾルベント集合$\rho(x)$の複素平面における補集合がLのスペクトル$\sigma(L)$である．開集合の補集合として，スペクトル$\sigma(L)$は常に閉集合であることが知られている．

すべての共役作用素が必ず閉作用素であることを示すことができるので，自己共役作用素$L=L^*$は閉作用素でなければならない．作用素の閉性は，変数分離解の収束にとっても重要であるから，問題2.9.2で扱われる．スペクトル論に対して，閉作用素が用いられなければならず，実用上微分方程式に含まれる殆んどすべての作用素は閉であるかあるいは閉可能である．

Rayleigh問題($0<x<\pi$上$-u''=\lambda u, u(0)=u(\pi)=0$)に対し，スペクトル$\sigma(L)$は厳密に固有値$\lambda_n=n^2$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)であった．同様に，節2.4のSturm-Liouville問題は，作用素の固有値のみから成るスペクトル$\sigma(L)$をもつ．これは典型的な(例外はあるけれども)有界領域問題である．作用素の点スペクトル$\sigma_p(L)$は

$$(L-\lambda)u=0$$

の非自明解を存在せしめるλ，したがって，作用素の固有値から成る．この様に，$\sigma_p(L)$は適切な問題の一意性(2)が破れるときのλである．

一意性(2)が成り立つが，存在(1)を示せないことも起り得る．その一つの例が本小節末尾の問題1に与えられており，実際上述の様に，この状況の出現は数多くの物理学的現象において重要である．この様なλに対して，すなわち方程式(#)が，殆んど固有稠密集合ではあるがすべてではないデータfに対して可解であり，いずれの場合に対しても一意的に可解であるλは，作用素Lに対する**連続スペクトル**$\sigma_c(L)$と呼ばれる*)．連続なる言葉は，多くの場合この種のλが平面で連続体，すなわち“擬固有関数”について述べた前小節の例の集合$[0, \infty)$を形成するという事実に起因する．この型の例を，本節の後の部分(問題3におけるHelmholtz方程式)と次節で，よ

*) ここでは，問題にしている空間で(#)がデータfの**固有稠密集合**に対して可解である事実にこだわる．すなわち，(#)は解の一意的な性質を満たすが，データfのある確かな非稠密部分空間に対してしか解かれ得ない．この第三のスペクトル$\sigma_r(L)$は**剰余スペクトル**と呼ばれるが，ここでは考えない．自己共役なLに対しては，この剰余スペクトルは存在しない．

り細かく見ることにしよう．自己共役作用素Lに対して同伴スペクトル測度による$\sigma_c(L)$の正確な“連続”の意味づけもあるけれども，ここでは議論しない*)．最後に，σ_cが孤立点として現われることもある．Sturm-Liouville作用素Lに対する$\sigma_c(L^{-1})$はそのよい例である．

例として，Rayleigh作用素$Lu=-u''$を考えよう．境界条件は$u(0)=u(\pi)=0$である．このスペクトルは，図2.7dに示される様に，$\sigma(L)=\sigma_p(L)=\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\}$である．一般的な定理(**スペクトル写像定理**)によって，$\sigma(L^{-1})=\sigma(L)^{-1}$が主張され，よってRayleigh作用素の逆

$$L^{-1}f=\int_0^\pi G(x,s)f(s)ds$$

はスペクトル$\lambda_n=n^{-2}$をもつ．このスペクトルは閉じているから，値$\lambda=0$もまた$\sigma(L^{-1})$に属する．L^{-1}がすべての$f\in L^2(0, \pi)$に対して定義され得ないことが問題1で直接証明される．よって，$\sigma_p(L^{-1})=n^{-2}$, $\sigma_c(L^{-1})=0$ (図2.7e参照)．

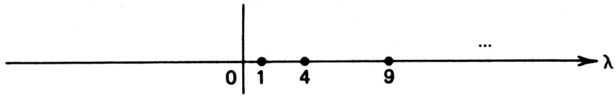


図2.7d

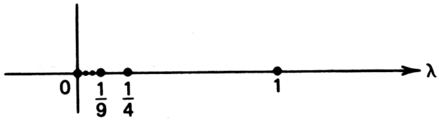


図2.7e

上の例題に対して，スペクトル写像定理は必要ではない．$\lambda\neq 0$でかつLが可逆のときは，明らかに

$$(L-\lambda)u=0 \Leftrightarrow \left(L^{-1}-\frac{1}{\lambda}\right)u=0.$$

更に一般的に，閉作用素Lに対して$\lambda\in\rho(L)$のとき$\lambda^{-1}\in\rho(L^{-1})$であり，かつその逆も成り立つことが容易に確かめられる．スペクトル写像定理は，“作用素の関数”を考えるとき，はるかに包含的であり，非常に有用である．ここで考えた“関数”は作用素の逆で，かなり単純なものである．

*)　自己共役作用素Lは，内積が領域$D(L)$のすべてのuに対して，$(Lu,u)=\int\lambda d(E_\lambda, u)$であるとの意味でLebesgue-Stieltjes積分としてかかれる．E_λはLに対する**スペクトル族**，$d(E_\lambda, u)$は**同伴スペクトル測度**と呼ばれ，連続スペクトル$\sigma_c(L)$のλに対して，(E_λ, u)はすべてのuに対して連続である．

節2.5問題２で，Ω上$Lu=-\Delta u$,∂Ω上$u=0$である偏微分作用素Lがコンパクトな逆$L^{-1}=\int_{\Omega}G(P,Q)$をもつことを示した．ただし$\Omega=(0,\pi)\times(0,\pi)$である．このとき，$\|G\|^2$が固有値の２乗和として表わされることは$L^{-1}$のコンパクト性に対して既知の(Hilbert-Schmidt)条件である．作用素のコンパクト性は有界性よりはるかに強い条件である*)．ただ，今の場合L^{-1}の有界なことは容易に確立される(節2.5問題２および問題2.9.5の議論を見よ)．固有値，従って$\sigma_p(L)$は既に見出されており(節2.1)，n^2+m^2 $(n,m=1,2,3,\cdots)$．よって$\sigma_p(L^{-1})=(n^2+m^2)^{-1}$，$\sigma_c(L^{-1})=0$．$\sigma_c(L^{-1})$の定性的な描像はRayleigh作用素の逆に対しても同様である．この定性的な描像が任意の(非特異)自己共役コンパクト作用素のスペクトルの特徴であることを示すことができる．

前の小節で論じた様に，±∞でuに適当な条件をもつ無限領域$\Omega=(-\infty,\infty)$に関する作用素$Lu=-u''$は，図2.7fに示される様な連続スペクトル$[0,\infty)$をもつと期待される．それを問題２で示す．

同様のスペクトルをもつ重要な作用素(問題２参照)は，既に節1.6.3で扱った$L^2(R^3)$における“自由ハミルトニアン”$Lu=-\Delta u$である．Coulombポテンシャル$1/r$を導入して，水素原子作用素$Lu=-\frac{1}{2}\Delta u-(1/r)u$も同じ連続スペクトルをもつが，他にも$\lambda_n=-\frac{1}{2}n^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$の固有値をもつ(図2.7g)．節1.6.3で既に与えた議論を参照せよ．

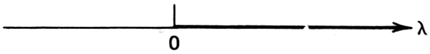


図2.7f

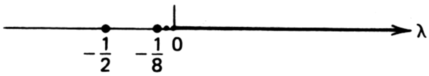


図2.7g

Helmholtz作用素，すなわち，非有界領域上のラプラシアン$Lu=-\Delta u$は，物理学の非常に広い分野に現れる．そのうちの一つについて問題３で解析する．節2.8に見る様に，Helmholtz作用素

*) 作用素Aのコンパクト性の正確な定義は，集合$\{A(x):\|x\|=1\}$がコンパクトな閉包をもつことであり，このことからこの集合の有界性が従う，すなわちAは有界作用素である．

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \lambda u, & \Omega &= R^n, \\
(-\Delta + V(x))u &= \lambda u, & \Omega&\text{は外部領域}, \\
(-\Delta + V(x) - \lambda)u &= f, & \Omega&\text{は外部領域}
\end{aligned}
$$

は重要であり，いずれも対応する次の波動方程式の変数分離法から生ずる．

$$u_{tt} - \Delta u + V(x)u = f(x,t).$$

問題 1　(a)　Rayleigh問題に対して上で議論した $0 \in \sigma_c(L^{-1})$ を直接示せ．(b)このとき，なぜ $0 \in \sigma_p(L^{-1})$ なのか，すなわち，なぜ L^{-1} の連続スペクトルは他の点がないのかを説明せよ．(c)Rayleigh作用素に対して $\sigma_p(L)$ に属しない λ について，$L^2(0,\ \pi)$ のすべての f に対して

$$(L-\lambda)u = f$$

の解を陽的にかき下ろせ．もし必要なら，Lebesgue積分演算のクラスについて悩むことのない様に，$f \in C_0^\infty(0,\ \pi)$ を仮定せよ．

問題 2　(a)　$\Omega = (-\infty, \infty)$ 上で作用素 $Lu = -u''$ を考え，各 $\lambda \geqq 0$ は λ が連続スペクトルに属するための必要条件を満たしていることを示せ．(b) $L^2(R^3)$ でハミルトニアン $Lu = -\Delta u$ を考えよ．すなわち，Ω は R^3 の全空間であり，$L^2(R^3)$ のデータとその解のみを考える．$\lambda = 0$ が固有値でないことおよび $-\Delta u = F$ が $L^2(\Omega)$ のすべてのデータ F に対して解けないことを示せ．(c)望むなら，すべての $\lambda > 0$ に対して同じことを示せ．また，すべての他の複素数の λ に対して，方程式 $(L-\lambda)u = F$ は適切であることを示せ．

問題 3　(a)　$\Omega = R^1, R^2, R^3$ そして一般に R^n に対して，Helmholtz方程式

$$-\Delta u = \lambda u$$

を極座標系において形式的な変数分離法によって解け．できるだけ複素数値解を用いよ．(b)それらの解を用いて，L^2 性または非 L^2 性に関する注釈を加えよ．(c)水素原子方程式

$$-\frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{r}u = \lambda u, \qquad \Omega = R^3$$

を形式的に変数分離法で解け．(d) L^2 解と非 L^2 解を区別せよ．

2.7.3　Fourier変換

Fourier変換を定義しかつ利用して，全空間問題への使用法を解説しよう．

$f(x)$ を可積分かつ2乗可積分とする，すなわち，$f \in L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$．Fourier変換 $F(f) = \hat{f}$ を次式で定義する：

$$F(f)(k)=\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}f(x)dx, \qquad -\infty<k<\infty.$$

Fは$L^2(-\infty,\infty)$を$L^2(-\infty,\infty)$の上へ1対1に写すことが示される*). ここで, ノルムと内積は保たれる. すなわち

$$\|\hat{f}\|=\|f\|, \qquad \langle\hat{f},\hat{g}\rangle = \langle f,g\rangle.$$

この種の変換は**ユニタリ変換**と呼ばれ, 基底変換, 回転その他数多くの有用な道具として考えられている.

この様に, $L^2(-\infty,\infty)$のどんなfもそのFourier変換$\int e^{ikx}f(x)dx$で与えられる同値な表現をもつ. これは節2.3の定理HでFourier級数を用いてなされたものと類似している.

$$e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx$$

に注目し, $k=\lambda$とおくと, Fourier変換の積分はfの"連続"Fourier係数とみなされる. すなわち

$$c_\lambda=(2\pi)^{-1/2}\ \langle f,\varphi_\lambda\rangle.$$

ここで, φ_λは$L^\infty(-\infty,\infty)$の"基底"関数で, $\varphi_\lambda=e^{i\lambda x}$, $-\infty<\lambda<\infty$. このFourier係数$f(\lambda)$からfを再構成するために, またもっと厳密に定理Hとの類推を見るために, **逆Fourier変換**

$$f=F^{-1}(\hat{f})=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda=(2\pi)^{-1/2}\int\overline{\varphi}_\lambda c_\lambda$$

を適用する. 節2.3の定理(3)と比較せよ.

同様に, Fourier変換$F: L^2(R^n)\to L^2(R^n)$を

$$\hat{f}(k)=(2\pi)^{-n/2}\iiint_{R^n} e^{ik\cdot x}f(x)dx$$

によって定義する. 収束の問題を除き, 大変容易に, Fourier変換の重要な性質

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}=-ik_i\hat{u}$$

*) これはまたParsevalの定理である. その証明は多くの参考書に見出される. 節2.3の定理Hを一般Parsevalの定理の特殊な場合とみなすこともできる. けれども, 休止第3回におけるParseval等式は内積形式であるから, 後者は前者の一般化であるとの別の立場を固持したい.

が示される(問題１)．これからラプラシアンの対応する変換

$$-\widehat{\Delta u}=\left(\sum_{i=1}^{n}k_i^2\right)\hat{u}$$

が得られる．よって，Fourier変換は微分作用素を乗法作用素へおき換える．特に，$-\Delta$の変換は$|k|^2$を乗ずることになる*)．

次に非有界領域問題

$$-u''=\lambda u,\qquad \Omega=(-\infty,\infty)$$

に関するこの変換の利用を説明しよう．Fourier変換(これは線形変換である)によって，

$$k^2\hat{u}=\lambda\hat{u}.$$

これは，固有関数uが$k=\pm\lambda^{1/2}$を除くすべてのkに対して$\hat{u}(k)=0$でなければならないこと，を直接示す．この解から，$u=\sin\lambda^{1/2}x$と$u=\cos\lambda^{1/2}x$が導かれる．

同様にして，Poisson問題

$$\Omega=R^n\text{上}\qquad -\Delta u=f$$

はFourier変換による解をもち，

$$u=F^{-1}\left(\frac{1}{|k|^2}(Ff)(k)\right)=\widehat{\frac{1}{|k|^2}}^{-1}\hat{f}.$$

ここで，二つの共通な記法が用いられている．ラプラシアンの逆作用素L^{-1}の点０にある特異性は，ここでは核$1/|k|^2$によって十分に示され，すべてのデータfに対してこの問題が可逆でない事実を示している．

Fourier変換を用いて，偏微分作用素の抽象的理論における**Malgrange-Ehrenpreisの定理**を確立することができる．その結果によって，$\Omega=R^n$に関する全空間問題に対して，定数係数をもつどんな線形偏微分方程式

$$Lu=f$$

でも，すべてのtest関数$f\in C_0^\infty(R^n)$に対して，その解が

$$u(P)=\int_{R^n}G(P-Q)f(Q)dV_Q$$

*)　もっと正確を期するために，特に微分方程式を変換するとき，uの扱われ方が厳密に指示されていなければならない．$\partial u/\partial x_i$にたいしては，uが２乗可積分な超関数的導関数をもつことで十分であり，Δuに対しては，uが２乗可積分な２階の超関数的導関数をもつことで十分である．節1.9.7(２)および節2.6を見よ．

によって与えられるとの意味で，Green関数$G(P, Q)$をもつことが主張される．ここで，Green関数$G(P, Q)$に三つの解釈が与えられたことを思い出そう（節1.5.2参照）：

(1)　$\int G(P, Q)=L^{-1}$.

(2)　$G(P, Q)$は基本特異関数である．

(3)　$L_Q G(P, Q)=\delta(P, Q)$（デルタ関数）．

この(1)の意味は，Green関数の積分がLに対する形式的な右逆作用素を保証することであり，滑らかな関数fに対して$L(\int G(P, Q)f(Q)\,dV_Q)=f(P)$．(2)の意味は，例えば，$R^3$上のラプラシアン$L=-\Delta$に対し，$G(P, Q)=1/4\pi|P-Q|$である事実によって支持される．これについて，読者は節2.8問題1で示される事柄に答えなければならない．(3)の意味は，$G(P, Q)$が問題の基本解である，すなわち，$P=Q$を除いてGが微分方程式を満たすことを述べる．このとき意味(1)での，問題を積分するのに必要な適正量の特異性だけをとらえることによって，点QでGにより(2)と(1)の意味が結びつけられる．

全空間問題に対して，一般に，Green関数，基本特異関数，基本解の概念はすべて一致することが見出される．すなわち，調整関数$g(P, Q)$（節1.6.1注意2参照）は必要でなくなる．

最後の注意として，R^3の上のPoisson問題に対し，（ここで$P=x, Q=y$とおいて）

$$u(x)=\int_k\int_y \frac{e^{-ik\cdot x}e^{ik\cdot y}}{|k|^2}f(y)\,dy\,dk. \tag{1}$$

これは，Malgrange-Ehrenpreisの定理によって知られる様に，また

$$u(x)=\int_y G(x-y)f(y)\,dy \tag{2}$$

で与えられるはずである．更に上で注意した様に

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_y \frac{1}{|x-y|}f(y)\,dy \tag{3}$$

でも与えられる．この事から，Fourier変換を用いた(1)，抽象的理論を用いた(2)，陽的な解表現の(3)は，原理的に同値であるが，異なる形式をもって現われ，異なる効力をもつことを，読み取るべきである．

問題1　(a)　Fourier変換の性質

$$\widehat{\frac{du}{dx}}=-ik\hat{u} \quad \text{および} \quad \widehat{\frac{d^2u}{dx^2}}=-k^2\hat{u}$$

を，1回および2回の部分積分法によって示せ．(b)幾つかの次元数に対し$\partial u/\partial x_i$と

$-\Delta u$について同様のことを行なえ．(*c*)Fourier変換を用いるにはΩが全空間であることが必要である事実を考えよ．

問題 2　(*a*)次のいわゆる**たたみ込み定理**を説明せよ．

$$\widehat{f*g}=(2\pi)^{-n/2}\hat{f}\hat{g}.$$

ここで，$f*g$はいわゆる**合成積**で

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy.$$

(*b*)　次の四つの段階をある程度まで確かめて，熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ u(x,0)=f \end{cases}$$

に対するPoisson解

$$u(x,t)=(4\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4t}f(y)dy$$

を一般化するために，それがどう用いられるかを示せ．

1.変換をとって，$\hat{u}_t=k^2\hat{u}$，$\hat{u}(0)=\hat{f}$.

2.後者の解がODEにより，$\hat{u}(k)=\hat{f}(k)e^{-k^2t}$.

3.$e^{-k^2t}=\widehat{(4\ \pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4t}}$.

4.たたみ込み定理から，結果を導く．

(*c*)　本節末尾での議論から，次を判定せよ．

$$\widehat{|k|^{-2}}^{-1}=\frac{1}{4\pi|x|}.$$

問題 3　(*a*)**Laplace変換**に対して，文献を調べよ．(*b*)上の問題 2(*b*)と同じく，それを用いて，そこでの熱の初期値問題を解け．

2.8　散乱理論入門

散乱理論は外部領域Ωにおける波動方程式

$$u_{tt}-\Delta u=f(x,t,u), \qquad x\in\Omega$$

の解に関係しており，双曲型偏微分方程式を含む数学的問題に関する研究にとって，共通のテーマである．所が，そのルーツは，物理学実験の内容にも非常に深く関わり，この主題を扱う際それらを無視してはいけない．従って，本節は散乱問題が現れる三つの物理学的設定を眺めることから始める．(a)古典論的散乱，(b)量子論的散

乱，(c)逆散乱．そのあとで，Rayleighによる古典的散乱に関する最初の仕事を簡潔に述べて，本節を閉じよう．その仕事は例えば，空はなぜ青いかに対して説明を与えるもので，一世紀も前になされたにもかかわらず，散乱問題を理解する上での基礎的な序論として歴史的にもその価値は失われていない．

節1.8(分岐理論入門)のときと同様ここでも，この主題の重要な深部にまで言及することができない．散乱法は物理学や工学で基本的な道具として，前世紀から発達してきた．散乱エネルギーが素粒子実験のものであれ，送電線からのものであれ，虹となる太陽光の散乱であれ，この問題は散乱によるエネルギー伝播の非常に基礎的な現われ方のために，将来も存在し続けるだろう*)．

(a)　古典論的散乱

古典論的散乱には多くのタイプがある．かなり容易に見られるものは，障害物による音波の散乱である．図2.8aはその問題の概略の説明を与える．すなわち，入射(平面)波が吸収性のない剛体障害物によって，外向き球面波として反射される．射線近似においては，図2.8aに描かれる様に，基本的な反射の方向はSnellの法則によって支配されるが，実際の波動力学では，その状態はずっと豊かで，はるかに複雑である．

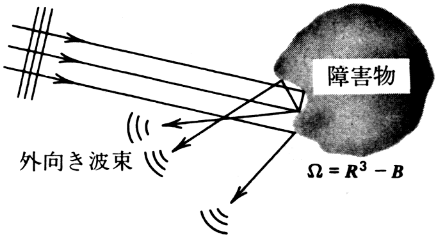


図2.8a

*)　読者に対し，すべてを述べられないから，ただ幾つかの参考書を挙げるにとどめる．数学と物理学の立場からの散乱の一般論に対するすぐれた著書は次である．R.G.Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Mc Graw-Hill,New York,1966)．障害物による古典論については，P.D.Lax and R.S.Phillips,*Scattering Theory* (Academic Press,New York,1967)．量子論的散乱や逆散乱については，極く最近出版された次を挙げよう．W.O.Amreine,J.M.Jauch,and K.B.Sinha,*Scattering Theory in Quantum Mechanics* (W.A.Benjamin,Inc.,Reading,Massachusetts,1977)；K.Chadan and P.C.Sabatier,*Inverse Problems in Quantum Scattering Theory* (Springer,Berlin,1977)．最近の研究を集めたものとして，J.La Vita and J.Marchand編：*Scattering Theory of Mathematical Physics* (Reidel,Doortrecht,1974)．

例えば，障害物が無限均質流体の中に沈められている場合を考える．波動力学の立場で，入射波の波束が音波から成っており，さらに，Ω内で一定音速cをもつとし，流体動力学の線形化モデルが許されるとき，波動方程式は

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & u_{tt}-c^2\Delta u=0, \qquad -\infty<t<\infty, \\ \partial\Omega\text{上} & \dfrac{\partial u}{\partial n}=0. \end{cases}$$

これは，節2.7で論じた型の外部領域問題である．ここで，$u=u(x,y,z,t)$は速度ポテンシャルであり，Neumann境界条件によって，反射に際して，速度が$\partial\Omega$上で0である必要はないけれども，障害物Bの動かないことを要請する．音波の速度成分は$v_i(x,t)=c\partial u(x,t)/\partial x_i(i=1,2,3)$である．量$\partial u(x,t)/\partial t$は音波によって惹き起こされた圧力の超過分を表し，$\partial^2u(x,t)/\partial t^2$はその圧力の変化の割合である．波動方程式は，圧力における変化の割合が速度変化の空間的割合（発散のc倍）に等しいという保存則を述べている．

この型の散乱問題に対する完全な決定として，例えば，ソナーによる潜水艦の捜索の問題が考えられる．

この問題を変数分離すると，Helmholtz方程式

$$\Omega\text{内で} \qquad \Delta u+k^2u=0$$

を得る．この問題は，他の二つの物理学的状況を述べた後で，再び立ちもどることにしよう．

(b) 量子論的散乱

ここでは，一つの粒子が他の粒子を散乱させる問題を考える．これには，(i)引力と(ii)斥力の二つの力の場が考えられる．加速器実験では，通常，全粒子雲が他の型の粒子雲に対して向きづけられなければならない．ここではその理論の代りに，単独粒子を考え，それら粒子間の相対運動のみを考慮して，大部分の粒子は静止していると仮定する．さらに，引力あるいは斥力が粒子間の距離rのみに依存するポテンシャル関数$V(r)$によって与えられると仮定する．

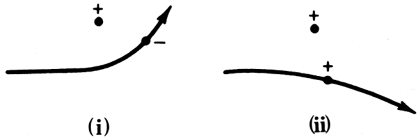


図2.8b

最も簡単な例の一つは，節1.6で扱った水素原子方程式

$$-\frac{1}{2}\Delta u-\frac{1}{r}u=\lambda u$$

である．時間依存と単位については，もともとのSchrödinger方程式

$$i\frac{\partial u(t)}{\partial t}=\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta u-\frac{Ze^2}{r}u$$

から，変数分離といわゆる原子(Hartree)単位によって，方程式に含ませた．もとの方程式で，eは電子の電荷，Zeは原子核での電荷，mは電子の質量である．原子核は仮想的に無限大の静止質量をもつとし，$\hbar$はPlanck定数である．uに対して既約定常Schrödinger方程式は，上の小節(a)で述べた古典論的散乱に対するHelmholtz方程式と同じ役割を演ずる固有値問題となる．このスペクトルは節1.6で与えた．

節2.7.2の問題3は，Helmholtz方程式やSchrödinger方程式を変数分離で形式的に解くために，用意された．

(c) 逆散乱

これは，実験の立場から，散乱の最も重要なタイプの一つである．加速器には，種々の型の調整済み粒子が送り込まれ，検知器が出現粒子を測定する(図2.8c)．時には，異型の粒子が現れるし，時には同型であるが恐らく位相変化をもつものも現われる．逆散乱問題とは，"散乱中心"で，すなわち，標的領域で何が起こっているか？という(標的をブラックボックスとする)問題である．

特に，できる限り繰返して行なわれた実験で集められたデータのすべてから，前の小節で触れた種々の粒子間のポテンシャル$V(r)$を見出したいのである．物理学における重要な問題の一つで，今日まで多くの場合回避してきた解決策は，そのデータから"相互作用法則" $V(r)$を決定することである．殆んどの物理学の巨大加速器実験は，この問題に関してそのまま考えられる．

これを数学的に見ることにし，簡単な例として，境界値問題

$$\begin{cases} -u''(x)+V(x)=\lambda u(x), & 0<x<\pi, \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{cases}$$

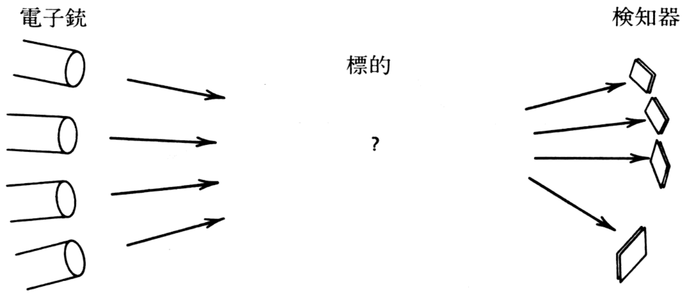


図2.8c

が与えられたとする．$V(r)$を完全に決定するには，どれだけ多くを知る必要があるだろうか？ある場合には，この問題を解くことができる．この興味ある問題を深く論ずることは，本書の範囲から余りに離れ過ぎている．物理学的に，その解は十分な“散乱データ”を知ることに依存する．数学的に，この作用素に対するスペクトルと固有関数について十分推察できることが必要である．直観的にそして古典的に，この問題は次の様な手段で考えられる：(i)ドラムの形状を“聴く”ために*)あるいは小節(a)で述べた音響散乱によって，どんな情報(音)が必要なのか？鯨と潜水艦を区別するには散乱するもののどれだけ多くの情報が必要となるのだろうか？

小球によるRayleigh散乱

Rayleighは，エネルギーが堅い小球に向って伝わるとき，高周波成分がより多く散乱されることを観察し，そしてそれを証明した†)．彼の行った議論を次に示す(図2.8d参照)．

小球の中心に座標原点をとり，z軸に沿って上方から平面波の波列が入射するとしよう．生成される散乱波は，z軸からの角度θに保存する振幅をもつ外向き球面波であるだろう．そしてこれらすべての波は波動方程式

$$\Omega\text{内で}\qquad u_{tt}-c^2\Delta u=0$$

を満たす．Ωはこの小球の外部である．小節(a)と同様ここでも，$u(t)$は与えられた一定波長μをもって伝わる波の速度ポテンシャルである（cは外部媒質における伝播速度)．これに対応して，$k=\omega/c=2\pi/\mu$は与えられた一定の単一波の波数である．こ

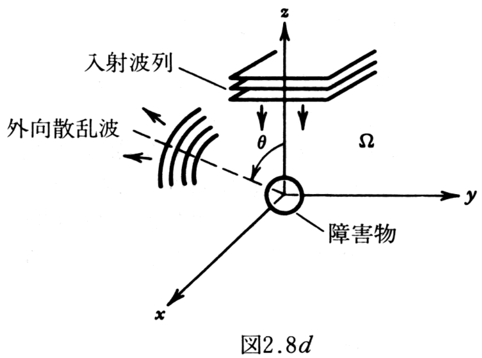


図2.8d

*) 例えば次を見よ．M.Kac, “Can one hear the shape of a drum？”, *Am.Math.Monthly* **73** (1966)，1-23；R.Prosser, “Can one see the shape of a surface？”, *Am. Math.Monthly* **84** (1977), 259-270 and 714.

†) これに関するよい解説は次の書に見られる．Lord Rayleigh, *The Theory of Sound,* (Macmillan, London, 1877；Dover, New York, 1945), Vol. 2, pp. 272-277.

の様に波全体は入射波と生成された散乱波との混合波列から成る．この散乱波は球面的に散乱され，かつ同じ波数をもつものと仮定された．

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{\text{入射}} + u_{\text{散乱}} \\ &= e^{i(kz-\omega t)} + f(\theta)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ &= e^{-i\omega t}u, \end{aligned}$$

ただし，

$$u = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}.$$

ここで，$u(t)$はその時間依存部分と定常部分とに因数分解されたが，これは変数分離によるものである．散乱振幅$f(\theta)$はその射出角θにのみ依存する．初等次元解析によって，この種の球面散乱波に対して振幅の動径成分の減衰r^{-1}は適切であることが示される．

$u(t)$を波動方程式に代入して

$$c^2 e^{-i\omega t}\Delta u = c^2\Delta u(t) = u_{tt} = -\omega^2 e^{-i\omega t}u.$$

よってuはHelmholtz方程式

$$\Omega\text{内で}\qquad \Delta u + k^2 u = 0$$

を満たす．t-依存を予め想定して，変数分離法をもとの波動方程式に適用すると，直ちにHelmholtzの，固有値問題

$$\Omega\text{内で}\qquad -\Delta u = \lambda u$$

になる．ここで，$\lambda = k^2$は固有値パラメータである．適用に応じて，Neumann型，Dirichlet型，あるいは他の型の境界条件が課せられる．

Rayleighは例えば，大気中にある小水滴に衝突する電磁波放射の問題に興味をもった．上のモデルから，e^{ikz}を球面調和関数（本質的には節2.1で挙げたLegendre陪関数）によって展開し，また$f(\theta)e^{ikr}/r$も球面調和関数とBessel関数によって展開することによって，次に考えている周波数帯に比べて十分に小さな球に対して，散乱振幅が

$$f(\theta) \sim k^2\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

であると，Rayleighは結論した．すなわち，高周波成分がより多く散乱する．

小節(a)で述べたソナーへの応用例では，同様の解析によって，散乱状態は波数に強く依存することが示される．このソナーの場合，ある周波数帯で射出されるが，標的からは（本質的に）唯一つの波数の波がもどってくる．他の周波数の散逸は，水中の減衰その他のもっと複雑な因子によって起される．これと同じ波数の選択は海底で鳴らされた鐘を聴くときにみられる．

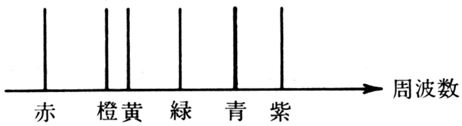


図2.8e

Rayleighの大気上での電磁波放射への応用において，空がなぜ青いのかが上の解析から示される．青色が色スペクトルの上端近くに位置しており(図2.8e)，より低い方の色は透過する間に十分に希薄にされてしまうからである．

非線形散乱理論は数多くの興味ある例題をもつが，その幾つかが問題2.9.8で与えられる．

節2.7で，変数分離法とFourier変換法が，外部問題に対して用いられた．次の最初の問題はその種の問題に対するGreen関数法を説明している．変分法もある場合には有効であるが，ここでは議論しない．

問題2と問題3は波動作用表$W_{\pm}$および散乱作用素Sの導入に関係する．

問題1 (a) $L^2(R^3)$内で$-\Delta u=f$である問題に対して，解が次で与えられることを示せ．

$$u(P)=\iiint_{R^3} G_0(P,Q)f(Q)dV_Q.$$

ただし，$G_0(P,Q)$はGreen関数で

$$G_0(P,Q)=\frac{1}{4\pi|P-Q|}.$$

(b) 実数値スペクトル$\sigma(-\Delta)=[0,\infty)$にない任意の複素数の$\lambda$に対して，非同次Helmholtz方程式

$$(-\Delta-\lambda)u=f$$

の解が，レゾルベント作用素$(-\Delta-\lambda)^{-1}$に対するGreen関数表現によって

$$u(P)=(-\Delta-\lambda)^{-1}f=\iiint_{R^3} G_\lambda(P,Q)f(Q)dV_Q$$

として与えられることを示せ．ただし

$$G_\lambda(P,Q)=\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|P-Q|}}{4\pi|P-Q|}.$$

(*c*)　$\lambda=x+iy$が非負実軸に近づく，例えば$x\geqq 0$を固定して$y\downarrow 0$のとき，上述の極限が正しいことを確かめよ．

問題 2　散乱理論における二つの基本的な要素は波動作用素

$$W_{\pm}\varphi=\lim_{t\to\pm\infty}e^{it\left(H_0+V\right)}e^{-itH_0}\varphi$$

と散乱作用素

$$S=W_+^*W_-$$

である．これらの作用素は“素のハミルトニアン”H_0のもとで“自由に”伝わる波に比べて，“相互作用ハミルトニアン”H_0+Vに従って伝わる波を数学的に研究するときの基礎をなす．ここでは相互作用がポテンシャルVによって支配される量子力学の形式を用いたが，$W_{\pm}$とSの同様な定式化は，障害物の影響をもつVでおきかえると，音響散乱に対しても，また他の散乱理論でも成り立つ．ここでの設定を図2.8*b*によって考えよう．すなわち，“自由軌道”$e^{itH_0}\varphi$を直線，“相互作用軌道”を標的領域に入ってくる直線と考え，そこで相互作用によって曲げられて，結局，異なる方向にある直線として放射される．

上の量を定義し，研究することに関して，興味ある深遠な数学的考察が数多くなされている．けれども，ここでは形式的に進めて*)，基礎的な考え方の幾つかを見ることにしよう．

相互作用VがH_0と可換であると仮定しよう．そのとき

$$W_+\varphi=\lim_{t\to\infty}e^{itV}\varphi.$$

次に定常的な平面波状態$\varphi=e^{ikx}$(k:一定)を考える．そのとき形式的に

$$W_+\varphi=\lim_{t\to\infty}e^{i(kx+Vt)}.$$

よってVは時間依存の振動を与える．大きなx（標的から十分離れた所）で$V=V(x)\longrightarrow 0$のとき，位相$kx+Vt$は結局初期位相kxに落着き，$W_+\varphi$は漸近的にφに近づく．$V=k_0x/t$なら，φの基本波数は，$W_+\varphi=e^{i(k+k_0)x}$となるように変化する．(*a*) $\varphi=e^{ikx}$と上で論じた$V(x)\to 0$に対して，$S\varphi$を形式的に見出せ．(*b*) $V(x,t)=k_0x/t$に対して問(*a*)と同様のことを考えよ．

問題 3　上でいかに無神経に終始したかを見るために，線形代数にもどって，$H_0=A, H_0+V=B$とする．ここでAとBは有限次元Hilbert空間上の$m\times n$行列である．(*a*) e^Aを定義せよ．(*b*) $W=e^{A+B}e^{-A}$を研究せよ．(*c*) また$S=(e^{-A})^*(e^{A+B})^*(e^{-(A+B)})(e^A)$を研究せよ．

*)　すなわち，すべての対象をスカラーとして扱う．

2.9　補足的議論および問題

節1.9と同様，本節は先行する八つの節2.1～2.8のそれぞれを補足する問題や読むべき素材を含む，そのあとに，三つの“確認”のための演算問題と更に進んだ演習問題を含む最後の問題2.9.9が置かれる．

問題2.9.1で，変数分離法，テンソル積，群表現の間にある関係を暗示させる簡潔な解説を与える．問題2.9.2は，Fourier部分和の極限として見出される解の収束性を，閉作用素の概念と結びつける．Hilbert空間$L^2(a,b,r)$がすべて可分であることおよびtest関数C_0^∞が常に稠密であることに附随した基本的事項を，問題2.9.3で説明する．節2.4のSturm-Liouville理論が特異な問題に関する利用に対して，極限点と極限円の手短かな考察を含めて，問題2.9.4において議論される．与えられた微分作用素の有界な逆作用素の核としてのGreen関数の概念が問題2.9.5の主題である．問題2.9.6で，節2.6を補足するための数値的な考察が追加され，(1)有限要素の収束とFourier級数との関連性，(2)初期値問題の典型的な数値解(節2.6では境界値問題と固有値問題のみが扱われた)，(3)Buckley-Leverett方程式が簡潔に取り扱われる．ここで(3)は，石油の二次回収の理論や他の意義深い応用で遭遇する移動界面の問題において，特に最近扱われ始めた．領域が有界でもまたそうでなくとも，２次元Dirichlet問題を解くための古典的方法として考えられる．Riemann写像定理の利用を問題2.9.7(1)で解説する．問題2.9.7(2)において，レゾルベント方程式を介して簡潔に眺めることにより，節2.7で論じたスペクトル理論が概説される．問題2.9.7(3)は波動方程式に対するKirchhoffの公式とHuygensの原理を扱う．非線形波動理論及びその解に対する近年の発展の幾つかが問題2.9.8で紹介される．

問題2.9.1　変数分離法とテンソル積

変数分離法は，厳密に実用的立場から，偏微分方程式を常微分方程式に帰着させて解く一つの方法とみなされる．後者の解はそのとき，初期データまたは境界データと一致する様に調整される．歴史的な背景において，これは例えばBernoulliやDescartesによって用いられた様に，データにおける基本的モードがその解に対しても，そのモードを再現するとの物理学的要請あるいは概念に対応する．この概念をもっと深く理解するために，複数の状況に目を向ける様な試みが，時には楽しませもし，時には啓蒙にもなる．今まで例えば，変数分離のスキームがFourier級数とHilbert空間の関係で用いられ，Green関数と関係づけられる，等々のことを見てきた．さて，文献には余り見られない深い概念的な関連事項を提案したい．具体的にいって，テンソル積との関係で変数分離解をみよう*)．

*)　この問題について考察するとき，テンソル積に関する参考書を身近に用意して欲しい．

まず，実際多くの応用に対して必要というより勝手気ままであると見られがちであるけれども，変数分離とテンソル積の間のこの提案された関係は多少秘義的に見える．他方，それは変数分離法とより高度の群の表現論（例えばこれは理論物理学でよく用いられる）の間に基本的な概念上の接点を備えており，読者の意向に応じて，前者は後者の動機となり，または後者が前者の着想としてなり得るだろう*)．ここでは，興味をもつ読者にそのより進んだ処理方法には触れずに，この関連を示したい．

二つのベクトルまたは関数u,vの内積(u,v)の概念は既に熟知したものになっている（節1.6.2，節2.3）．例えば，$u=(a_1,a_2,a_3),v=(b_1,b_2,b_3)$を3次元空間$E^3$のベクトルとするとき，その内積の計算は行列記法で記号的に行なわれ，

$$(u,v)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

uとvの**テンソル積**†)はすべての積a_ib_jから成り，行列記法で記号的に

$$u\otimes v=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$$

テンソル積はベクトル値の外積‡)$u\times v$と混乱を起してはいけない．内積はスカラー値であり，テンソル積は行列値であることに留意しよう．

実際，二つのベクトルのテンソル算法はもっと複雑であり，取り扱いには十分な注意を必要とする．まず，問題にしている二つのベクトル空間U,V（上例では共にE^3)のテンソル積$U\otimes V$は，UとVのすべてのペアを代数的基底にとり，それらの一次結合を作り，テンソル積の演算$\otimes$が双線形性の性質

$$\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\otimes\sum_{j=1}^{m}d_jv_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_id_ju_j\otimes v_j$$

をもつ様に，そのベクトル空間を同値類に分解して作られる．$U\otimes V$に対する他の（直接さに欠けるが）規定法がある．それには線形汎関数が用いられている．

代数学に深入りすることのないようにして，特に，テンソル積のより進んだ例二つに注目しよう．

Uを次元数n以下の多項式$X(x)$のベクトル空間，Vを次元数m以下の多項式$Y(y)$

*)　G.W.Mackey: *Unitary group representations in physics, probalility, and number theory* (Addison-Wesley, New York,1978)に対する次の議論を見よ．K.E.Gustafson, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **2**(1980), 225-229.

†)　他にも，直積の名称が用いられる．

‡)　他にも，クロス積，ベクトル積が用いられる．

のベクトル空間とする．$U \otimes V$は，2変数xとyの多項式$Z(x,y)$のベクトル空間と同一視され*)，よって二つのベクトル$X(x)$と$Y(y)$の“単純なテンソル”$X(x) \otimes Y(y)$は多項式の積$X(x)Y(y)$と同一視される．

$U = L^2(a,b), V = L^2(c,d)$のとき，$U \otimes V$は$L^2((a,b)\times(c,d))$と同一視される．

さて，偏微分方程式にもどって，特に正方形Ω上のDirichlet問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上} & u = f \end{cases}$$

を考えよう．ここで，底辺$y=0$，$0<x<\pi$以外で$f=0$．変数分離解は，同伴常微分方程式の解をなす既知関数$X_n(x), Y_n(y)$を用いて

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$$

であった．この様にこの解は$L^2((0,\pi)\times(0,\pi))$における“単純なテンソル”とみなせる．

問題 関心をもって次の問の一つに答えよ．(a)上記に関連して，少し学習して更に深めよ．(b)与えられたベクトル空間上の二つの作用素をテンソル的に乗ずる方法を考察せよ．このとき例えば$\partial^2/\partial x \partial y$が作用素$\partial/\partial x$と$\partial/\partial y$のテンソル積とみなしてよいことを示せ．($c$)経験を積んだ読者は，しばしば“事柄がこれまで通りであるとき”丁度“テンソル積こそが救いとなる”とする考えを信じている†)．しかしながら，この結果は，生じたテンソル積が運用に困難であり，それが事柄を元に帰結し難たくするかも知れないということである．これについて，特に変数分離法に関連づけて考え，説明せよ．

問題2.9.2 Fourier級数の収束と閉作用素

Fourier級数の部分が偏微分方程式の解に収束することを示すとき，具体的には，閉作用素の概念が用いられた．多くの微分作用素Lは正しくおかれているとき，いずれも閉作用素である．事実何度も(2.9.5参照)，それらの逆L^{-1}は連続作用素であった．

閉作用素の概念は連続作用素に比べて弱く，よって後者を先に注目する．一つの線形ノルム空間X（節2.3参照）から他の線形ノルム空間Yへの線形作用素Aが連続であるといわれるのは，$u_n \longrightarrow u$のとき$Au_n \longrightarrow Au$が成り立つときである．初等微

*） 数学的に厳密にいえば，“AはBと同一視される”とは“AとBは距離同型である”

†） 偏微分方程式の場合に対しては，変数分離法を一層信頼して示された様に（(本書上巻）において)，この種の考え方は既に受け入れられている．この事は，疑いを挟むなら，固有関数展開こそが救いとなる手続きにも等しい．

積分学の課程にみられた連続関数の最初の概念そのものである．有限次元空間上のすべての行列作用素はこの性質をもち，多くの積分作用素でも同様である．

微分演算は収束性を弱める働きがあり，その理由で，微分作用素は通常それらの自然な設定において連続であるとは限らない*)．一つの線形ノルム空間Xの領域$D(A)$から他の線形空間Yへの線形作用素Aが**閉じている**といわれるのは，$u_n \in D(A)$，$u_n \longrightarrow u$かつ$Au_n \longrightarrow y$ならば，$u \in D(A)$かつ$Au=y$が成り立つときである．

問題(a)　$D(L)=C^1[0,1]$とし，最大値ノルム$\|u\|=\max_{0\leq x\leq 1}|u(x)|$，すなわち，いわゆる一様収束ノルムで収束を扱うことにして，$L=d/dx$が$X=Y=C^0[0,1]$からの閉作用素であることを示せ．

上の問題は$u'_n(x)$が一様収束し，かつ$u_n(x)$が$u(x)$に一様収束するとき，$\lim_{n\to\infty}u'_n(x)=u'(x)$となる事実（高等微積分学の教科書を参照）を用いて解かれる．節2.2で変数分離の正当性を証明したとき，この性質が手広く用いられた．

同時に$\partial/\partial x$や$\partial^2/\partial x^2$なども正当な設定で閉作用素になる．$L^2(0,1)$ノルムでd/dxおよびd^2/dx^2を閉にするためには，領域$H^1(0,1)$および$H^2(0,1)$，すなわち弱導関数のSobolev空間を用いる必要がある(これらの空間のより詳しくは節2.6参照)．上の問題の様に，たとえ連続関数$C^n(\Omega)$ノルムが初め扱い易くても，$L^2(\Omega)$やSobolev空間のノルムの方が物理学的により適切なものになっている．

問題(b)　ラプラシアンΔが節1.7.1問題3と同様，$X=Y=L^2(R^3)$における閉作用素であるとき，そこで与えられた全水素作用素も閉作用素であることを示せ．

節2.2で$\Delta(\lim s_N)=0$を証明したとき，議論は実際にΔが閉作用素である事実に依った．すなわち，$s_N\to 0$とし，各Nに対して$\Delta s_N=0$に注目した．このとき，Δが閉作用素であることを知っていれば，直ちに$\Delta u=0$.

問題(c)　最大値ノルムとL^2ノルムの両者を用いて，直ぐ上で述べたことを確かめよ．

問題2.9.3　可分性とtest関数

本節では，次の関連した基本的な事実が確立される．

(i)　$L^2(a,b,r)$は常に**可分**Hilbert空間であること

(ii)　test関数$C_0^\infty(a,b)$はそこで常に**稠密**であること

(i)に対しては，予備的な補助定理で次の概念の同値性が明らかにされる．

*)　微分作用素は連続作用素である様に強いられる．このやり方は，超関数や位相ベクトル空間の現代的理論の多くの根底をなしている．けれども，ある種の自然さは失われる．

(iii)　(1)**可分性**
(2)可算**稠密性**
(3)可算**完備性**
(4)可算**極大性**

後者は，自然なやり方で，次へ移行する．

(iv)　Gram-Schmidt直交化手法

(ii)の証明で，与えられた関数のC_0^∞級関数への

(v)　**軟化**（mollification）

の手掛かりとなる技法へと導く．

本節はこの様に，関数空間における常微分作用素や偏微分作用素の抽象的理論をより深く研究するときの，主な手掛りとなる構成要素を含むとみられよう．

Hilbert空間Hは，稠密な可算集合$\{\varphi_n\}$が存在するとき，**可分である**といわれる．それによって，Hの各hと任意の$\varepsilon>0$に対してφ_kが存在し

$$\|h-\varphi_k\|<\varepsilon$$

とできることがわかる．この概念を完全に理解するために，次の補助定理が必要であろう．

補助定理（可分性）

次の命題はHilbert空間Hに対して同値である．

(1)　Hは可分である．すなわち，上で述べられた稠密可算な$\{\varphi_k\}$が存在する．
(2)　“完備な”可算列$\{\eta_n\}$:$\overline{sp\{\eta_n\}}=H$が存在する*)．
(3)　節2.3の定理Hの意味で“極大”可算正規直交列$\{\varphi_n\}$が存在する．

証明

(1)⟹(2)．Hが可分であるとする．このとき，$\{\varphi_n\}$はたとえ一次結合をとらなくても，(2)の意味で“完備な”列である．(2)⟹(3)は，次の様にしてGram-Schmidtの直交化法を用いて示される．$\{\eta_n\}$を独立かつ完備とする．

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{n}a_{n_i}\eta_i,\qquad n=1,\cdots$$

とする．ここで，規定によって

$$\langle\varphi_n,\eta_i\rangle=0,i=1,\cdots,n-1,$$

*）$\overline{sp\{\eta_n\}}$は$\{\eta_n\}$の張る空間の閉包である．$\{\eta_n\}$の張る空間は$\{\eta_n\}$のすべての有限一次結合$\sum_{i=1}^{n}a_i\eta_i$からなる．このときこの空間は，この補助定理の条件(2)のもとでHで稠密であることが必要である．

$$\|\varphi_n\|=1,\ a_{nn}>0.$$

η_iに対してこの系を解くと

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n} b_{ni}\varphi_i,\qquad n=1,\cdots.$$

よって$sp\{\varphi_n\}=sp\{\eta_n\}$.　(3)⟹(1)は，$\{\varphi_n\}$として有理係数だけをとった一次結合$\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$の張る空間$sp_{rat}\{\varphi_n\}$の可算性と稠密性からわかる.

問題(a)　上の証明をもっと詳細にわたって，かき下ろせ.

節2.4で，Hilbert空間$L^2(a,b,r)$が基本的な役割りを演じた. $L^2(a,b,r)$はある区間$(a\ ,\ b)$上で定義され，そこで重み関数$r(x)$に関して2乗可積分，すなわち$\int_a^b |u(x)|^2 r(x)dx<\infty$である関数からなる. 重み関数は$(a\ ,\ b)$において狭義の正，かつ局所可積分でなければならない.

命題　($L^2(a,b,r)$の可分性)　$a<c<b$とし，次の様にとる(図2.9a)

$$\eta_t(x)=\begin{cases}\chi_{[c,t]}(x), & c\leqq t,\\ -\chi_{[t,c]}(x), & t<c.\end{cases}$$

$\{t_i\}$を(a,b)内のすべての有理数の順序づけとする. このとき，$\{\eta_{t_i}\}$は上の補助定理(2)の意味で，$L^2(a,b,r)$において“完備”である.

証明

どのη_{t_i}も$L^2(a,b,r)$に含まれる. なぜなら，重み関数rが正で，局所可積分であり，そのとき

$$\int_a^b (\eta_{t_i})^2 r(t)dt\leqq\int_c^t r(t)dt<\infty$$

が成り立つからである. 節2.3の定理Hの証明と同様，すべてのiに対して$(f,\eta_{t_i})=0$なら$f=0$になっていることを示すことで十分である. 先へ進めて，$f\neq 0$のとき

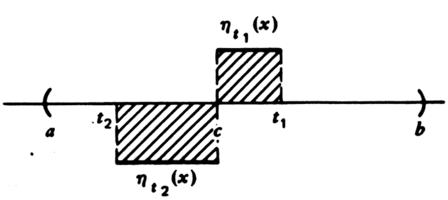


図2.9a

すべてのiに対し$(f,\eta_{t_i})=0$ $\Rightarrow f\perp sp\{\eta_{t_i}\}$
$\Rightarrow f\perp sp\{\varphi_{t_i}\}$ 〔Gram-Schmidt法による〕
$\Rightarrow\{f\|f\|^{-1},\varphi_{t_i}\}$は$\{\varphi_{t_i}\}$の拡大である．

$\{f\|f\|^{-1},\varphi_{t_i}\}$からGram-Schmidt関係を振り返って，すべてのη_{t_i}に対して$(f,\eta_{t_i})=0$となり，これは矛盾である．

問題(b) 本文で与えた証明をもっと詳しくかき下ろせ．(c) 次の別証について詳細を確認せよ．上と同じ条件で，$F(t)=(f,\eta_t)=\int_c^t f(s)r(s)ds$としよう．$F$は$(a,b)$で$t$の連続関数，$(a,b)$で$\{t_i\}$の稠密集合上$F(t_i)=0$．よって$F$は$(a,b)$上恒等的に0．従って，被積分関数$f(s)r(s)=0$が微分演算によって殆んど到るところで成り立ち，よって殆んど到るところで$f=0$.

上で確立された$L^2(a,b,r)$の可分性は，階段関数の稠密集合を構成することに依存した．Lebesgue積分論を既習の読者にしてみれば，これはまったく自然発生的な方法である．微分方程式のための関数の稠密集合に対して，そのかわりに，心配することなく可微分な非常に滑らかな関数を提案する．

コンパクトな台をもつ無限回可微分な関数$C_0^\infty(\Omega)$がいかなる$L^p(\Omega)$空間$(1\leqq p<\infty)$でも稠密である事実（これは後で証明されよう）は，微分方程式の古典的な解析的扱いと現代的な関数解析的扱いの間にある基本的な関係である．厳密さにこだわらず，十分な配慮を払い，心要なだけ十分な滑らかさを仮定する．このとき，通常の形式的古典的な議論は，少なくとも，その問題に含まれるすべての関数にとっていわゆる弱い形において成立する．すなわちまず滑らかな問題で進め，次に極限操作（稠密性の利用）によって，含まれるすべてのデータや考慮中の作用素の領域におけるすべての関数（例えば，単に弱可微分な関数あるいは超関数）に対して必要な議論を完成させるよう試みる．

$C_0^\infty(\Omega)$が$L^p(\Omega)$特に$L^2(\Omega)$で稠密であることの証明は，1次元での$L^2(a,b,r)$に対して次に与える証明と，通常，同様である*⁾.

基本近似定理（test 関数）

$C_0^\infty(\Omega)$は任意のΩと任意の$1\leqq p<\infty$に対する$L^p(\Omega)$において稠密である．特に$C_0^\infty(a,b)$は$L^2(a,b,r)$の稠密な部分空間である．

証明

上述と同様，簡単のため後者のみを証明しよう．ここでの着想の中心部は，それらの稠密性を同時に保ちながら，上記命題のη_tをC_0^∞級関数の中へ**軟化する**ことであ

*) 一般的な場合の一般的証明については次を見よ．N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators* II (Wiley, New York, 1963).

る．軟化は偏微分方程式論における基本的な道具である*)．

次の様に置こう（図2.9b）．

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases} c_\varepsilon e^{-(\varepsilon^2-x^2)^{-1}}, & |x|<\varepsilon. \\ 0, & |x|>\varepsilon. \end{cases}$$

ここで

$$c_\varepsilon=\frac{1}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-(\varepsilon^2-x^2)^{-1}}dx.}$$

このとき$\delta_\varepsilon(x)$はC_0^∞級関数で，$\delta_\varepsilon(x)>0$，かつ$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=1$．$(a,b)$内の任意の$y$に対して，$\varepsilon$が小さい，すなわち，$\varepsilon<d(y,\partial(a,b))$ならば，$\delta_\varepsilon(x-y)$は$C_0^\infty(a,b)$に属する．$(a,b)$内の$c$および$t$に対して，$\eta_t$は上記命題における$L^2(a,b,r)$に在ることを想起せよ．

$$\eta_{t,\varepsilon}(x)=\int_a^b \eta_t(y)\delta_\varepsilon(x-y)dy$$

とおこう．これは軟化されたη_t（または，η_tの軟化）である．階段関数η_tのC_0^∞平滑化として$\eta_{t,\varepsilon}$が小さなεに対し，すなわち$\varepsilon<\min[b-c,c-a,b-t,t-a]$に対して$C_0^\infty(a,b)$に属することが確かめられる．$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=1$であるから

$$\eta_{t,\varepsilon}(x)-\eta_t(x)=\int_a^b(\eta_t(y)-\eta_t(x))\delta_\varepsilon(x-y)dy.$$

そして

$$\begin{aligned}|\eta_{t,\varepsilon}(x)-\eta_t(x)| &\leqq \max_{y\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}|\eta_t(y)-\eta_t(x)| \\ &\leqq \begin{cases} 2, & (a,b)\text{のすべての}x \\ 0, & |x-c|>\varepsilon\text{かつ}|x-t|>\varepsilon\text{のすべての}x. \end{cases}\end{aligned}$$

よって，$\varepsilon\to 0$のとき，殆んどすべてのxに対して$|\eta_{t,\varepsilon}(x)-\eta_t(x)|\to 0$.

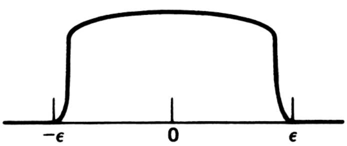


図2.9b

*)　これはここでそれをあばき出すための補足的な根拠である．

軟化$\eta_{t,\varepsilon}(x)$がもとの$\eta_t(\varepsilon)$に殆んど到る所で点別収束するこの事実は，それ自身興味のあることである．

この定理の証明を完成させるには，更に，$\eta_{t,\varepsilon}(x)$が$L^2(a,b,r)$ノルムで$\eta_t(x)$に収束することを示すことが必要である．これはLebesgue優収束定理（節1.6.3参照）を復習して直ちに示される．すなわち，その定理によって，$|\eta_{t,\varepsilon}(x)-\eta_t(x)|^2$が，$\varepsilon_n\to 0$のとき，殆んど到る所で，有界かつ0に収束するとすれば，

$$\|\eta_{t.\varepsilon_n}-\eta_t\|^2_{L_2(a,b,r)}=\int_a^b|\eta_{t,\varepsilon}(x)-\eta_t(x)|^2r(x)dx\to 0$$

も同時に成り立つ．

以上をまとめて，$L^2(a,b,r)$の任意の関数fは，η_{t_i}の有限一次結合によって，任意にどこまでも近似され得て，η_tも順にそれらのC_0^∞級軟化によって任意にどこまでも近似され得る．

問題(d) $\delta_\varepsilon(x)$が実際にC_0^∞級であることを証明せよ．(e)更に，$\eta_{t,\varepsilon}(x)$もC_0^∞級であることを証明せよ．

問題2.9.4 極限点と極限円

Sturm-Liouville理論は，特異な問題に対する極限点や極限円がたとえ簡単なものであっても，それらを無視しては，完全な議論とはいえない*)．

節2.4で与えたSturm-Liouvilleの定理は正則の場合に限られた．すなわち，$L^2(a,b,r)$のすべての関数fに対するFourier展開は，自己共役な境界条件をもつ方程式

$$-(pu')'+qu=\lambda ru, \qquad a<x<b \qquad (1)$$

の固有関数$\{\varphi_n\}$によって，与えられた．他方，節2.4の問題2において，HermiteやLegendreの方程式などの親しみのある方程式が正則でなく，しかもそれらが極大固有関数集合をもつことを見てきた．

Hermann Weyl†)はこの事情を複素領域で，すなわち，複素平面のλに対して解析し，実際にはλに依らない二つの場合があることを見出した．λが実数でないとし，初めに端点bの近くでの特異な挙動を探し出せる様に(a,b)内にcを選ぶ（次にaの近く

*) より詳しい情報に対しては例えば次を見よ．E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations,* I, 2nd ed. (Oxford Press, Oxford, 1962) chapt. 2; E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations* (Mc Graw Hill, New York, 1955) （訳者注：常微分方程式（吉田節三訳）吉岡書店）．

†) H. Weyl, "Ueber gewöhlriche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkerlicher Funktionen", *Math. Ann.* **68**(1910), 220-269.

でも同様に扱う).

場合1．**極限円型．**(1)のいずれの解も2乗可積分，すなわち，$L^2(a,b,r)$に属する．

場合2．**極限点型．**(1)の基本解の一つが2乗可積分，すなわち，$L^2(a,b,r)$に属するが，他の基本解は2乗可積分でない．

非常に一般的な条件のもとで，常微分方程式(1)が（結果的に一意的な）二つの1次独立な解（今後基本解と呼ぶ）をもつこと，およびすべての解はそれら二つの基本解の一次結合であることが知られている．少くとも一つの2乗可積分が常に存在することを示し得るので，Weylの結果におけるこれら二つの型は，完全である．“極限点”や“極限円”なる術語はその証明の中にあり，ここでは，それを見ておこう．所でまず，$a<c<b$において正則あるいは特異な方程式(1)に対して，上で与えた事実を多少なりとも精密にしておく．基本解の対を用いて考えるとき，“他の”解とは任意の他の1次独立な解のことであり，“両者の”解とはすべての解である．

定理(Weyl)

(i)　任意のλに対して，$L^2(c,b,r)$の解が常に一つある．

(ii)　実数または非実数の任意のλ_0に対して，両者の解が$L^2(c,b,r)$にあるとき，両者の解はすべてのλに対して$L^2(c,b,r)$にある．このとき，Sturm-Liouville方程式(1)はbで**極限円型にある**といわれる．

(iii)　実数または非実数のあるλ_0に対して，一つの解が$L^2(c,b,r)$にないとき，Sturm-Liouville方程式(1)はbで**極限点型にある**といわれる．このとき次の二つの場合が生ずる．(a)λ_0が非実数．このとき(i)によって他の解は$L^2(c,b,r)$にある．(b)λ_0が実数．このとき，他の解は$L^2(c,b,r)$にあることもないこともある．

ここではこの定理の証明を完全な形で与えないが（その証明は多くの常微分方程式論の参考書に見出される)，どうして極限点とか極限円とかの用語がその証明から浮かび上がるかを見てみよう．それを行う過程で，証明の要点すべてが理解できよう．通常ロンスキアンを用いる基幹をなす事実から始められる．

1．非実数のλに対して，(1)の解が$L^2(a,b,r)$に属するための必要十分条件は$\lim_{x\to b}W(u,\bar{u})(x)$が有限なことである．これは部分積分法から直ちに

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_c^x |u|^2 r ds = W(u,\bar{u})(x) - W(u,\bar{u})(c).$$

2．(1)の二つの基本解$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$を次の様に定義する：$\varphi_1(c)=1, p(c)\varphi'_1(c)=0; \varphi_2(c)=0, p(c)\varphi'_2(c)=1$．項目1から任意の解$u$に対して$(\lambda-\bar{\lambda})^{-1}W(u,\bar{u})(x)$は$x$の増加関数である．特に，任意の複素数を$z$として，任意の$u=z\varphi_1+\varphi_2$を考えると，簡単な計算によって，次が示される．

$$(\lambda-\bar{\lambda})^{-1}W(u,\bar{u})(x)=(\lambda-\bar{\lambda})^{-1}W(\varphi_1,\bar{\varphi}_1)(x)[|z-z_0(x)|^2-r_0^2(x)].$$

ここで

$$z_0(x)=-\frac{W(\varphi_2,\bar{\varphi}_1)(x)}{W(\varphi_1,\bar{\varphi}_1)(x)}$$

および

$$r_0^2(x)=\frac{|W(\varphi_2,\bar{\varphi}_1)(x)|^2+W(\varphi_2,\bar{\varphi}_2)W(\varphi_1,\bar{\varphi}_1)}{-W(\varphi_1,\bar{\varphi}_1)^2}=\frac{1}{|W(\varphi_1,\bar{\varphi}_1)(x)|^2}.$$

3．$z_0(x)$を中心とし，$r_0(x)$を半径とする円$C(x)$を複素平面上にとる(図2.9c)．項目２から，xの増加関数はこの円の内部のzに対して負値をとることがわかり，これから，$C(x_2)$が$x_2>x_1$の円$C(x_1)$に含まれると結論される．よってこれらの円は，xの増加に従って，順次内側に納まる．

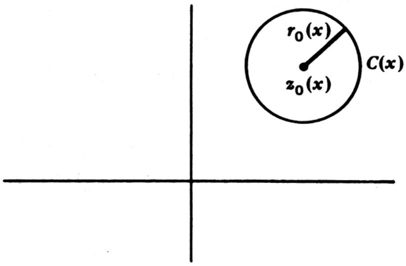


図2.9c

4．さて，$x\uparrow b$のとき，(a)この円群が中心$z_0(b)$で半径$r_0(b)$をもつ一つの円に縮まるか，(b)この縮小があらゆるやり方で一点$z_0(b)$に落ちつくかの，いずれかである．場合(a)では，“極限円”型に属し，上の１項と２項からすべての量，とくに極限円$C(b)$の内のzに対する$(\lambda-\bar{\lambda})\int_c^b|u|^2rds$は有限である．(b)の場合には，“極限点”型に属し，上の項目１と項目２から

$$|\lambda-\bar{\lambda}|\int_c^x|\varphi_1|^2rds=|W(\varphi_1,\bar{\varphi}_1(x)|=r_0^{-1}(x)\to\infty.$$

問題(a) 上で概説した証明の細部を埋めよ．(b) Legendre方程式は極限円型であり，Hermite方程式は極限点型であることを示せ．(c) 節2.4の正則な場合が極限円であることを証明せよ．

問題2.9.5　Green関数と連続作用素

問題2.9.2で，閉作用素の概念を簡潔に議論した．すなわち，作用素Lが閉じているのは，$u_n \to u$かつ$Lu_n \to f$ならば，uが領域$D(L)$に属し，かつ$Lu=f$となるときであった．Dirichlet問題に対して，この概念は次の様に述べられる．変数分離法による解候補uの部分和s_Nがuに収束し($s_N \to u$)，すべてのs_Nに対して$\varDelta s_N=0$が成り立つことによって，$\varDelta$がその局面で閉作用素として働くことが示されれば，uが領域$D(\varDelta)$にあり，$\varDelta u=0$. $\varDelta$の指摘された働きは，ここでは明示しないけれども，陽的に示され得る*)．

微分作用素Lの多くは連続な逆作用L^{-1}をもち，この逆はGreen関数を核とする積分作分用素として，しばしば表現される．Dirichlet-Poisson問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & -\varDelta u = F, \\ \partial\Omega\text{上で} & u=0 \end{cases}$$

に対するGreen第3等式を推論することによって，解が

$$u(P)=\int_\Omega G(P,Q)F(Q)dV_Q$$

で与えられることは，既に学んだ(節1.6.1注意2)．そこでなされた様に，Lが$\partial\Omega$上で0をとる関数に作用する負号付ラプラシアン$-\varDelta$であるとき，L^{-1}は積分作用素

$\int_\Omega G(P,Q)\,(\cdot)\,dV_Q$で与えられた．

次に，このL^{-1}が実際に連続作用素であることを示そう．$v_n \to v$のとき，$Av_n \to Av$となるならば，作用素Aは連続であった†)．ここでの場合には，これはPoissonデータとして$F_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} F$となることに相当し‡)，Dirichlet-Poisson問題の結果としての解がまた収束すること，すなわち

$$u_n = Q^{-1}F_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} L^{-1}F = u$$

*) 要領を得た証明はLax-Milgramの定理を用いるもので，次を見よ．K. Yosida, *Functional Analysis* (Springer, Berlin,1968).重要な初期の論文は，L.Gårding, "Dirichlet's problem for linear partial differential equations," *Math. Scand.*, **1** (1953), 55-72. 広汎な一般的取り扱いは，F. Browder "On the spectral theory of elliptic differential operators," *Math. Ann.* **142** (1961), 22-130. 最近の研究およびL^p理論に関して，C.G.Simader,On Dirichlet's Boundary Value Problem, *Springer Lec. Notes*,**268** (1972).

†) 問題2.9.2を見よ．関連する考察として，節2.6を見よ．

‡) 連続性をいうために，距離の選び方を必要とする．この様な選び方は通常一意的でないけれども，Hilbert空間$L^2(\Omega)$の使用が自然である．このノルムでL^{-1}は本文で示された様に連続である．

ということになろう．これは例えば，Green関数を直接用い，F_Nが$L^2(\Omega)$ノルムでFに収束するとき，$\int G(P,Q)F_N(Q)dV_Q$が$C^2(\Omega)$ノルムで$\int G(P,Q)F(Q)dV_Q$に収束することを示すことによって理解される．議論は次の様にして進められ，本質的に$G(P,Q)$が共々2乗可積分であることに依存する．すなわち，Schwartz不等式によって

$$\begin{aligned}\|L^{-1}F_n-L^{-1}F\|^2_{L^2(\Omega)}&=\int_\Omega\left(\int_\Omega G(P,Q)F_N(Q)dV_Q-\int_\Omega G(P,Q)F(Q)dV_Q\right)^2dV_P\\&\leqq\int_\Omega\left(\int_\Omega G^2(P,Q)dV_QdV_Q\right)\left(\int_\Omega|F_N(Q)-F(Q)|^2dV_Q\right)dV_P\\&=\|G\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}\cdot\|F_N-F\|^2_{L^2(\Omega)}\to 0.\end{aligned}$$

問題(a) Hilbert空間またはBanach空間*)において，作用素Aが連続であるための必要十分条件は，それが有界なことである．すなわち，その空間のすべてのuに対して

$$\|Au\|\leqq M\|u\|$$

である様な数Mが存在することである．この様な数Mの最小数を作用素Aのノルム$\|A\|$という．Hilbert空間H上のAに対して，Aが有界ならば，そしてそのときに限って，Aは連続である．これを示せ．

(b) Hilbert空間上の作用素Aが強正値であるといわれるのは，その空間のすべてのuに対して

$$(Au,u)\geqq m\|u\|^2$$

である正の数mが存在するときである．このとき，A^{-1}が連続であること，および $\|A^{-1}\|\leqq m^{-1}$を示せ．

(c) 本文の議論で，Dirichlet-Poisson問題に対するL^{-1}が連続であることが直接示された．それには，Green関数$G(P,Q)$が両変数について2乗可積分であることを証明抜きで仮定した（節2.5問題2参照）．問(b)の方法によって，この問題のL^{-1}が連続であることを示せ．（ヒント：Lの固有値の変分的特徴付けを思い起せ．）

(d) 強正値自己共役作用素は全空間の上への写像である．厳密でなくてよいが，この重要な事実の証明を与えよ．

(e) Banachのより一般的な定理によって，すべての閉作用Lに対して，$(L^*)^{-1}$が有界ならば，Lは上への写像であると主張される．この事実†)を節1.6(2)1″の脚注でなされたアプリオリ評価式に関する注釈と関連付けよ．

*) もっと一般の位相ベクトル空間では，Aの有界性とAの連続性とが同値の概念である必要はない．

†) これらの事柄に関する多くの情報は次で見出される．K. E. Gustafson, "State diagrams for ``ilbert space operators", *J. Math. Mech.*(now *Indiana Univ. Math. J.)*,**18** (1968), 33-45.

問題2.9.6　数値的考察への補足

偏微分方程式の数値解法の分野は比較的新しく，近年急成長を示しているが，それでも完成には程遠い．ここでは次の三つの問題で，節2.6を補足しよう：(1) 有限要素法の収束性の解説，(2)初期値問題に対する並列前進法，(3)石油の回収問題に現われるBuckley-Leverett方程式の取り扱い．いずれも，それらの主題の表面を僅か擦でる程度でしか扱っていない．より詳しくは，第3章付録Bの議論を見られたい．

(1) 有限要素法の収束

Fourier展開を用いて，有限要素近似に対する収束の速さを確立することがしばしば可能である．ここでは変分法とFourier法の間にあるこの型の関係を例に挙げて説明しよう．

Poisson問題

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x), & 0<x<\pi, \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{cases}$$

を考え，近似関数（通常**要素**と呼ばれる）として区分的に1次連続関数を用いて，有限要素法で数値的に近似しよう（図2.9d）．基底（隣接のものを除いて互いに直交するもの）はいわゆる**屋根型関数**と呼ばれ（図2.9.e），これによってN個の部分区間の格子上で近似する区分的1次関数u_Nは常に

$$u_N(x)=\sum_{n=1}^{N} u(nh)\varphi_n(x)$$

とかかれる．いずれの“節点”でも$u_N(nh)=u(nh)$．よって暗々裏に未知の解uを“既知である”と仮定する．しかしながら，精密な評価は差分によって得られるし，実際示したいものは，uが微分方程式に起因する，しないにかかわらず，任意に与えられた関数uに対する有限要素近似の収束性である．

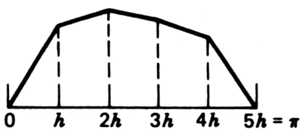


図2.9d

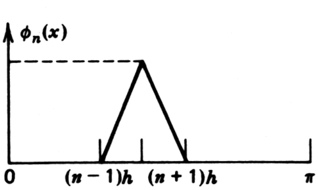


図2.9e

問題(a)　長さhの区間上両端点で消える任意の（C^1級）関数$v(x)$に対し，Poincaré不等式

$$\int_0^h v^2(x)dx \leqq h^2 D_h(v), \qquad D_h(v) = \int_0^h (v'(x))^2 dx$$

を導け．

(b)　任意の格子区間$(n-1)h \leqq x \leqq nh$上で$v(x)=u(x)-u_N(x)$とおく．このときFourier展開

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\frac{m\pi}{h}x, \qquad v' = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{m\pi}{h}\cos\frac{m\pi}{h}x,$$
$$v'' = -\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{m^2\pi^2}{h^2}\sin\frac{m\pi}{h}x$$

を用いて，C^2級関数のuに対して次の評価が可能であることを示せ．

$$\int_{(n-1)h}^{nh} (v'(x))^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2,$$
$$\int_{(n-1)h}^{nh} (v''(x))^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \left(\frac{m\pi}{h}\right)^4.$$

よって，

$$D_h^n(v) \equiv \int_{(n-1)h}^{nh} (v'(x))^2 dx \leqq \frac{h^2}{\pi^2}\int_{(n-1)h}^{nh} (v''(x))^2 dx.$$

和をとり，区間上で$v''(x)=u''(x)$に注目すると

$$D(u-u_N) \leqq \frac{h^2}{\pi^2}\int_0^{\pi} (f''(x))^2 dx.$$

よって，有限要素近似は網目の大きさを用いてh^2の割合で，Dirichletエネルギーノルムで収束する．

(2)　初期値問題に対する並列前進法

数値的方法に補足される演習問題として，次の初期値境界値問題を考えよう．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 \leqq x \leqq 1, \quad t \geqq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqq x \leqq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

x_i $(i=0,\cdots,N)$ を区間〔0，1〕の正則な分点とし，増分をhとする．そして節2.6と同様有限の差分で近似する．すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(x_i,t)=\dfrac{u(x_{i+1},t)-2u(x_i,t)+u(x_{i-1},t)}{h^2}, & 1\leqq i\leqq N-1, \\ u(x_i,0)=f(x_i), \quad 1\leqq i\leqq N-1, \\ u(x_0,t)=u(x_N,t)=0, \quad t\geqq 0. \end{cases}$$

問題(a)　この系を常微分方程式の方法で解け．(b)　t_j $(j=0,\cdots,M)$ とおいて時間についても離散化する．このとき，各t_jを〔0，T〕の一定な分点とするとき，次の差分系に到達することを示せ．ただし，kは増分の長さとする．

$$\begin{cases} u(x_i,t_{j+1})=u(x_i,t_j)+\dfrac{k}{h^2}(u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1,j})), \ 1\leqq i\leqq N-1, \\ u(x_i,0)=f(x_i), \quad 1\leqq i\leqq N-1, \\ u(x_0,t_j)=u(x_N,t_j)=0, \quad 0\leqq j\leqq M. \end{cases}$$

(c)　初期値を$f(x)=x(1-x)$に，また網目の大きさを$N=M=5$または10に指定して，$t=0$から始めて，tについて1ステップごとに上方へ繰り返せ(すなわち前進させよ)．
(d)　より高次元の空間において，この様な問題に対してADI法を学習せよ*)．

(3)　油の二次回収問題におけるBuckley-Leverett方程式

重要ではあるが余りよく知られていない方程式は，石油の二次回収問題や，重量液体を軽量液体の中に強制的に押し込めるある種の軍事的応用に，また不混和液体の混合理論における一般的方程式として現われる†)．この型の方程式の研究にとっては，数値的方法がむしろ重要である．

この方程式の現われる，すなわち油の二次回収問題の状況を少しく述べよう‡)．図2.9fに示される場面を想像しよう．(i)は多孔質媒質において，Ωの外向きには(仮

*)　節2.6とこの問題2.9.6で，数値的方法が簡潔に導入されたに過ぎない．偏微分方程式に対する数値的技法について，より詳しくは第3章附録Bを見よ．よい基本文献は例えば次である．R. D. Richtmeyer and K. W. Morton, *Finite Difference Methods for Initial Value Problems,* 2nd ed. (Wiley, New York, 1967).

†)　たとえば，次の初期的な論文と写真を見よ．G. I. Taylor "The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes," *Proc. Roy.Soc. London* A**201** (1950) 192-196; "II" (by Lewis) *loc cit,* A**202** (1950), 81-96.最近の研究として，G. H. Pimbley, Jr., "Stationary solution of the problem of Rayleigh-Taylor instability", *J. Math. Anal. appl.* **55** (1976),170-206.　Buckley-Leverett方程式それ自身はずっと以前に次で定式化された．S. E. Buckley and M. C. Leverett, "Mechanism of fluid displacement in sands," *Trans. Amer. Inst. Mining Eng.,* **146** (1942), 107-116.その様な油層面回収問題の説明に対して次を見よ．L. P. Dake, *Fundamentals of Reservoir Engineering* (Elsevier, N. Y. ,1977). Rayleigh-Taylor界面不安定と砂層中の油層面回収問題との間の関係は一般には知られていない様に思われる．

‡)　通俗的な術語として，油の一次回収は自然の油圧に起因するもので，二次回収は油層の場の中へ水を圧入することに因る回収法である．三次回収は，表面張力とこの流れに対する障害物を逓減させる様に，化学的界面活性剤を二次回収時に追加させて行なう回収法である．

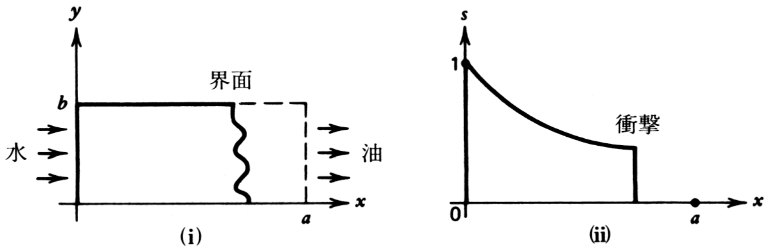


図2.9f

想的固体岩壁によって）y方向には流れない水平流の断面を示す．水はΩの中に（はるか遠くにある孔から）左側より圧入され，油は水によって（どこかにある回収孔に向けて）右側に強制的に動かされる．重力とすべての鉛直方向の流れは無視される．水－油の界面は，(ii)で示される様に，水飽和度関数$s(x,y)$の右側へ移動する衝撃波として現われる．

図2.9fに示した境界面をもち，重力や毛管引力が働かず，更に密度変化がないと仮定した平面水平流に対して，次の偏微分方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} \quad (Au_x)_x+(Au_y)_y=0, \\ \Omega\text{内で} \quad ms_t-Au_xF_x-Au_yF_y=0. \end{cases}$$

ただし，境界条件と初期条件は，それぞれ

$$\begin{cases} u_y=0, \quad y=0 \text{ および } y=b, \quad 0\leqq x\leqq a, \\ u=f(y,t), \quad x=a, \quad 0\leqq y\leqq b, \\ u_x=g(y,t)/A, \quad x=0, \quad 0\leqq y\leqq b, \\ s=h(y,t), \quad x=0, \quad 0\leqq y\leqq b \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} s=s_0(x,y), \quad t\geqq 0, \quad (x,y)\in\Omega, \\ \Omega=\{(x,y)|0\leqq x\leqq a, 0\leqq y\leqq b\}. \end{cases}$$

連立偏微分方程式の第一式は2階楕円型，第二式は1階準線形である．これらの式は多孔質媒質に対する**Darcyの法則**と，節1.7の場合と同様にして，質量保存の(連続)方程式から導かれる．Darcyの法則とは，透過速度が圧力勾配に比例することを述べる経験則である．

主な未知量は次の二つである．

$u(x,y,t)$＝時刻tにおける点(x,y)での圧力，
$s(x,y,t)$＝時刻tにおける点(x,y)での飽和度．

ここで，sは水による百分率飽和度である．よって対応する油の飽和度は$1-s$である．主たる量の他の二つ，$A(s,x,y)$は透水係数であり，$F(s)$は**Buckley-Leverett関数**と呼ばれる百分率水流の測度である．具体的に表すと，

$$A=k\left(\frac{k_w}{\mu_w}+\frac{k_0}{\mu_0}\right) \text{ および } F=\frac{\mu k_w}{k_0+\mu k_w}.$$

ここで，$k_w(s)$＝透水係数，k_0＝透油係数，μ_w＝水の粘性係数，μ_0＝油の粘性係数，$\mu=\mu_0/\mu_w$．これらすべて実験的に既知である．$k(s,x,y)$はその物質に対する絶対透過係数である．$m(x,y)$は平均孔隙率（既知）を示し，f,g,h,s_0は既知データである．

境界条件は（動かない）横壁に対する圧力無し，出口で圧力既知（例えば，大気圧），入口で制御可能な圧力勾配および飽和度に，それぞれ対応する．初期条件は，初めに（例えばすべての油の）相対的飽和度が既知であるとしている．

問題(a)　Aとmを一定（簡単のため両者とも1）にとり，この問題に対する解の一意性を研究せよ．進んで幾つかの簡略化を施して，一定時間での界面の左側にある領域(Ω)の部分に，第一方程式（ラグランジアン）に対する一意性の疑問を，境界条件とともに考えよ．

この種の方程式およびそれに関連したより複雑な形の方程式について，大量の数値的研究がなされている．簡単な説明として，y方向を無視し，第二式に1階差分スキームを適用する．すなわち

$$m\frac{s_i^{n+1}-s_i^n}{k}-u_x\frac{F(s_i^n)-F(s_{i-1}^n)}{h}=0.$$

ここで，kは時間ステップの離散化長さ，hは空間ステップの離散化長さである．これらのスキームは，さらに圧力と2階方程式を離散化すると，もっと面倒になる．より有力な（例えば，Lax-Wendroff）のスキームもまた用いられている*)．

*)　有限要素法に関係して，次を見よ．J. Douglas, Jr., T. Dupont, and H. Rachford, Jr., "The application of variational methods to waterflooding problems" *J. Canadian Pet. Tech.* 8 (1969), 79-85.より詳しくは，V. M. Entov and V. B. Taranchuk, "Numerical simulation of the displacement of oil by water", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mech. Zhid. i Gaza,* No.5, 1979（英訳*Fl. Dyn.* **14** (1979), 682-686).

問題(b)　第一（楕円型）方程式の離散化をかき下ろしてみよ．

第一方程式のy方向を無視したので，$(Au_x)_x=0$．よって$Au_x=q(t)$．これを第二(Buckley-Leverett)方程式に代入すると，次の1階方程式を得る．

$$m(x)s_t(x,t)-q(t)F_x(s(x,t))=0.$$

問題(c)　この種の方程式の解析解を，特性曲線の方法によって研究せよ（付録Aを見よ）．

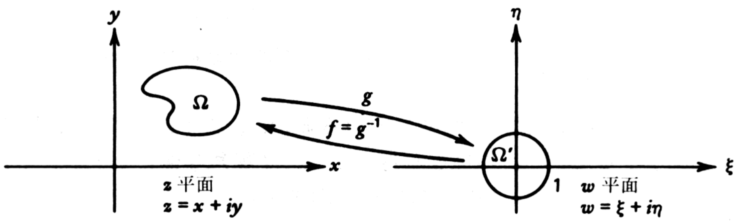
問題2.9.7　解析的考察への補足

(1)　2次元領域とRiemannの写像定理

歴史的にみて，常微分方程式から偏微分方程式への第1段階は，次元数$n=1$の常微分方程式から次元数$n=2$の偏微分方程式に移るときに現われた．多くの物理学的問題は次元数$n=3$の領域Ω上でのみ生ずるけれども，物理学的仮定を加えて，それらを2次元あるいは更に1次元の問題に帰着させている．

2次元領域Ω上の偏微分方程式の取り扱いに対して強力な（複素変数の）解析関数の理論が，19世紀後半大いに発展した．関連する解析関数論と偏微分方程式の間で交錯する局面は余りにも多過ぎる．従って，重要かつ解説的要素の強い例，すなわち，Riemannの写像定理と2次元の任意領域Ω上のDirichlet問題を解くときのその利用に関する問題に絞って考えよう．

この様なDirichlet問題を考え，写像$w=g(z)$すなわち$w(\xi,\eta)=g(x,y)$によって，それを単位球に関するDirichlet問題に変換できたと仮定しよう（図2.9　g）．この種の座標変換を試みる際，問題1.9.1の分類手続きで行ったと同じく，写像gに対して$\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y)$とし，逆写像$f=g^{-1}$に対して，$x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$とおく．これらをラプラシアンに代入し，微積分学の連鎖規則を用いると（本小節末尾の問題参照），



$$\begin{cases} \Delta_{x,y}(x,y)=0,(x,y)\in\Omega \\ u(x,y)=h(x,y),(x,y)\in\partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_{\xi,\eta}u(\xi,\eta)=0,(\xi,\eta)\in\Omega' \\ u(\xi,\eta)=h(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\partial\Omega' \end{cases}$$

図2.9g

$$\Delta_{\xi,\eta}u(\xi,\eta)=u_{xx}[x_\xi^2+x_\eta^2]+2u_{xy}[x_\xi y_\xi+x_\eta y_\eta]+u_{yy}[y_\xi^2+y_\eta^2]$$
$$+u_x[x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta}]+u_y[y_{\xi\xi}+y_{\eta\eta}].$$

よって，問題1.9.1と同じく，その様な1対1の変換は次を満たす．

(i) $x_\xi^2+x_\eta^2=y_\xi^2+y_\eta^2$,

(ii) $x_\xi y_\xi+x_\eta y_\eta=0$,

(iii) $x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta}=y_{\xi\xi}+y_{\eta\eta}=0$.

何らかの方法で，系(i)，(ii)，(iii)を解き，1対1変換を得ることが出来れば，そのとき，$\Delta_{\xi,\eta}u(\xi,\eta)=0$．勿論，$\Omega$がその変換のもとでどう変換されるかに関しては未だ何も述べられていない．

系(i)，(ii)，(iii)には，$x(\xi,\eta)$と$y(\xi,\eta)$の導関数のみが含まれる．(i)と(ii)を解いて，$x_\xi=\pm y_\eta$および$x_\eta=\mp y_\xi$．このとき，これらの式は(iii)を満たす．いずれの符号を選んでもよいが，ここでは上側の符号をとろう．よって変数$x=x(\xi,\eta)$と$y=y(\xi,\eta)$は次の方程式を満たす．

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial y}{\partial \eta},\quad \frac{\partial x}{\partial \eta}=-\frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

これらの方程式は，変換$z=f(w)$すなわち

$$x(\xi,\eta)+iy(\xi,\eta)=f(\xi+i\eta)$$

に対する**Cauchy-Riemannの方程式**とよばれ，これらが満たされるときはいつでも，fは解析関数であることを示すことができる．

解析関数は（問題1.9.4と同様）べき級数表現をもつ．けれどもここでは，単一複素変数の解析関数を扱い，その場合，fはその導関数df/dwの存在と方向依存なしの附加的な性質をもつ*)．応用に際して，fを1対1変換で表現することが望ましい．2変数から2変数への写像関数の微積分学の理論から，1対1写像に対する十分条件は，写像関数のヤコビアンが消えないことである．すなわち

$$0\neq J\begin{bmatrix} x & y \\ \xi & \eta \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix}=x_\xi^2+y_\xi^2=|x_\xi+iy_\xi|^2=|f'(w)|^2.$$

よって，$f(w)$の解析性の他に，問題にしている領域，ここでは単位球Ω_c上で$f'(w)\neq 0$なる性質を賦与させたい．この様な写像$z=f(w)$は**等角写像**といわれ，それは孤の間でなす角度を保存するという附加的性質に由来する．

*) Banach空間のより一般的な設定で，この様な導関数は**Fréchet導関数**とよばれる．解析関数論が非常に強力であることの理由の一つは，1次元(複素)Hilbert空間からそれ自身へのFréchet可微分関数で取り扱えることにある．

さて，Riemannの写像定理*)は，その様な写像を保証する．Ωを複素平面全体でない単連結（孔をもたない）領域とし，$z_0=x_0+iy_0$をΩの任意に選ばれた点とする．w平面の原点0にz_0をとる等角写像$g(z)$を，$|g'(z_0)|>0$かつ$g(z)$がΩから単位球$|w|<1$へ1対1である様に，一意的にとることができる．$\partial\Omega$上の仮定を追加して，$g(z)$が$\partial\Omega$を$|w|=1$に移す連続な1対1の延長をもつことが示される．

この様にして，（有界であってもそうでなくても）任意のこの様な領域上のDirichlet問題へ適用するとき，gがz平面のΩをw平面の単位球に移し，$f\equiv g^{-1}$がw平面の単位球をz平面のΩに移す様にとれる．これが要請された変数変換$x=x(\xi,\eta)$，$y=(\xi,\eta)$を与える．単位球上のDirichlet問題に対するGreen関数は

$$G(p,q)=-\frac{1}{2\pi}\ln|p-q|+\frac{1}{2\pi}\ln|1-p\bar{q}|$$

（p,qは$|w|\leqq 1$内の二点）であるから，Ω上のDirichlet問題のGreen関数は

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\ln|g(P)-g(Q)|+\frac{1}{2\pi}\ln|1-\mathrm{g}(P)\overline{\mathrm{g}(Q)}|$$

（P,Qはそれぞれ$|w|\leqq 1$内のpとqに移す等角写像によって移されるΩの二点である）．既知として問題のGreen関数を得たならば，その問題は原理的に解けたことになる．このとき，詳細な検討，例えば$G(P,Q)$が本当にGreen関数であること，$\partial G/\partial n_Q$を用いて与えられた境界値問題の解に対するPoisson表現となっていることなどの検討が残されているけれども，上で取り扱われたΩ上のDirichlet問題に対する場合はそれらが示される．また与えられたデータに対する具体的な計算をすることも残される．

問題(a)　連鎖規則の計算，すなわち，上に示された計算を確かめよ．　(b)　等角写像の計算は容易であるか大変困難であるかである．次を試みよ．(i)写像$g:\Omega$（上半z平面）$\longrightarrow|w|<1$（単位球）を見出せ．(ii)写像$f:|w|<1$（単位球）$\longrightarrow\Omega$，$z=f(w)=(w+2)^2$によって与えられる領域Ωを見出せ．　(c)　問(b)の(i)，(ii)に対して，Green関数を見出し，そしてΩの点Pでの解$u(P)$を次のPoissonの積分公式によってかくことにより，Dirichlet問題を解け．

$$u(P)=-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n_Q}(P,Q)h(Q)ds_\Omega.$$

*）　簡潔な証明は例えば次に見られる．L. Ahlfors, *Complex Analysis* (Mc GrawHill, New York, 1953)（訳者注：複素解析（笠原乾吉訳）一第3版（1979）より訳出，現代数学社）．

(2) レゾルベント作用素とレゾルベント方程式

節2.7.2で，作用素Lのスペクトル$\sigma(L)$は，$(L-\lambda)u=f$が適切でない様な複素数λであるとして定義された．残りのλはLに対するレゾルベント集合$\rho(L)$と呼ばれる．レゾルベント集合$\rho(L)$に対して，方程式$(L-\lambda)u=f$は適切であり，形式的に

$$u=(L-\lambda)^{-1}f$$

で与えられる解をもつ．多くの場合，Green関数を用いて，特殊な解表現

$$u(P)=\int G_\lambda(P,Q)f(Q)dQ$$

をもつ．ここで積分はデータfの与えられている領域(例えばΩとか$\partial\Omega$)についてとられる．Green関数表現が知られていてもいなくても，レゾルベント集合$\rho(L)$のλに対する作用素

$$R_\lambda\equiv(L-\lambda)^{-1}$$

は**レゾルベント作用素**と呼ばれる．

非常に重要な方程式がレゾルベント作用素に対して成り立つ，いわゆる**レゾルベント方程式**

$$R_{\lambda_1}-R_{\lambda_2}=(\lambda_1-\lambda_2)R_{\lambda_1}R_{\lambda_2}$$

である．この方程式から，R_λは小節(1)で論じられたものに似た解析関数的性質をもつことがわかる*)．

レゾルベント方程式とその変形は偏微分方程式を含む多くの応用に現われる．例えば，節2.7.2において散乱理論でとりあげたHelmholtz方程式

$$\Omega=R^3\text{上で}\quad(-\Delta+V-\lambda)u=f$$

に対して，解uを（より容易な）非摂動問題

$$\Omega=R^3\text{上で}\qquad(-\Delta-\lambda)w=f$$

の解に対比させてみよう．$V=V(x)$を好適な乗法的実ポテンシャルである様にとって，λが純虚数のとき，$-\Delta$と$-\Delta+V$の自己共役性によって，どちらの方程式も$L^2(R^3)$で適切であることがわかる．この様なλに対して

$$R_\lambda^0=(-\Delta-\lambda)^{-1}\quad\text{および}\quad R_\lambda=(-\Delta+V-\lambda)^{-1}$$

とおくと，次の変形レゾルベント方程式が得られる．すなわち

*) レゾルベント作用素のより詳しい性質については，節2.7.2で与えた文献のいずれかを参照せよ．

$$R_\lambda f=(R_\lambda^0-R_\lambda^0 VR_\lambda)f.$$

非摂動問題に対する解$w=R_\lambda^0 f$が陽的にかき下ろされたと仮定すると，ポテンシャルVをもつHelmholtz方程式はそのレゾルベント方程式により，“反転させられる”ことがわかり，次式で与えられる．

$$u=w-R_\lambda^0 Vu.$$

これは多くの場合，次の積分方程式である．

$$(I-K_\lambda)u=w.$$

ここで，$w=R_\lambda^0 f$は仮定された既知のデータであり，$K_\lambda=-R_\lambda^0 V$は例えばR_λ^0に対するGreen関数表現とVの程よく好適な性質によってコンパクトである．この型の積分方程式は**Fredholm型方程式**と呼ばれ，それに対しては非常に多くの理論が存在する．

問題(a)　上のレゾルベント方程式を形式的に確かめよ．(b)　先に与えたHelmholtz作用素に対する変形レゾルベント方程式を形式的に確かめよ．(c)　量子物理学のいわゆるLippmann-Schwinger方程式は，$\lambda=x+iy$を実軸に近づけたときの上述変形レゾルベント方程式の形式的極限である．物理学の記法で

$$p^+=p-G^0(\lambda+i0)Vp^+$$

としばしばかかれる極限をとる問題が，なぜ存在するのか？　ここで$\lambda+i0$は上半平面からの極限を表す．

(3)　Kirchhoffの公式とHuygensの原理

節2.7.3で導入したFourier変換を用いて，偏微分方程式の解に対する幾つかの重要なGreen関数表現を推論することができる．ここでは，3次元波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta_3 u=0\ ,\ x\in\Omega=R^3, & t>0, \\ u(x,0)=f\ ,\ x\in\Omega, \\ u_t(x,0)=g\ ,\ x\in\Omega \end{cases}$$

に対するPoisson積分解を導くことによって，それがどの様になされるかを説明しよう．ここで，$x=(x_1,x_2,x_3)$. $f=f(x)=f(x_1,x_2,x_3)$と$g=g(x)=g(x_1,x_2,x_3)$は初期データである．その前に，節2.5で得られた対応する１次元問題

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty, \\ u_t(x,0)=g(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

の解に対するd'Alembertの公式に注目する．その解は“Poisson積分”公式*)

$$u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)ds$$

によって与えられる．この式から，点x_0と時刻t_0での解uが区間$[x_0-t_0, x_0+t_0]$上のデータにのみ依存することがわかる．この区間（図2.9h）は解の**依存領域**と呼ばれる．$g=0$の場合を概念的に図2.9hに描いたが，依存領域の物理学的意味は（ここでは伝播速度cを単位にとった）波動方程式に対して，時刻$t=0$でx_0-t_0とx_0+t_0での波を，より後の時刻t_0では位置x_0で感じるということに他ならない．局所的な伝播速度cをもつ波動方程式$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$を考えると，d'Alembertの公式は区間$[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$上で平均をとることにその違いが現われ，

$$u(x_0,t_0)=\frac{f(x_0+ct_0)+f(x_0-ct_0)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}g(s)ds.$$

図2.9hに現われた違いは，点(x_0,t_0)からの特性曲線が初期データ線$t=0$に$1/c$の傾斜性をもつことだけである．より大きなcに対して，(x_0,t_0)で解に影響する初期波動がより早く到達することになる．

さて，3次元波動初期値問題にもどり，解$u(x,t)$に対するいわゆるKirchhoffの“Poisson積分”公式を導く過程で，上と同じ“初期データの平均化”が行なわれていることを見るだろう．

$$\begin{cases}\Box_3 u=0,\ x\in R^3, \quad t>0,\\ u(x,0)=f,\\ u_t(x,0)=g.\end{cases}$$

ここで，n次元波動方程式に対して，むしろ標準的な記法$\Box_n u$が用いられた．以下に見出されるKirchhoffの公式の性質から，解uは次式で与えられることが確かめられる（本節末尾の問題参照）．

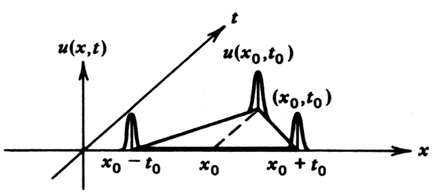


図2.9h

*)　これを他のすべての“Poisson積分”公式から区別するために，通常，こちらを**d'Alembertの公式**と呼ぶ．同様に，3次元問題に対して，次に見出される“Poisson積分”公式はしばしば**Kirchhoffの公式**と呼ばれる．

$$u=u_g+\frac{\partial}{\partial t}(u_f).$$

ここで，u_gおよびu_fはそれぞれ

$$\begin{cases}\Box u_g=0, x\in R^3,\\ u(x,0)=0,\\ u_t(x,0)=g,\end{cases}\qquad \begin{cases}\Box u_f=0, x\in R^3,\\ u(x,0)=0,\\ u_t(x,0)=f\end{cases}$$

の解である．従って，（先験的に明らかとはいえないが）この事実を採用して，一般的な問題に対しては$u_t(x,0)$データのgのみをもつ初期値問題を解けば十分である．この場合の解に対するKirchhoffの公式は

$$u(x,y,z,t)=\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}g(x+t\sin\theta\cos\varphi, y+t\sin\theta\sin\varphi, z+t\cos\theta)\sin\theta d\varphi d\theta.$$

この式は，任意の点(x_0,y_0,z_0,t_0)における解$u(x_0,y_0,z_0,t_0)$が“依存領域” $S_{t_0}(x_0,y_0,z_0)$球面（図2.9i)上でのgの平均であり，

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{t_0}{4\pi}\oiint_{S_{t_0}}g(s)\,ds$$

とかかれることを述べている．

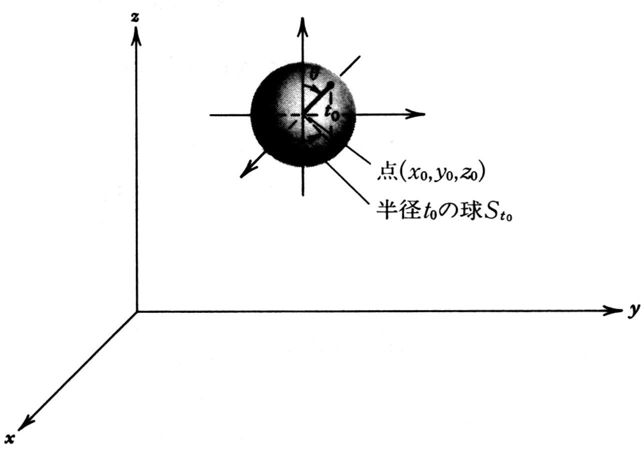


図2.9i

$n=3$に対するKirchhoffの公式と$n=1$に対するd'Alembertの公式の間の類似性に注目しよう，すなわち

3次元：$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=(x_0,y_0,z_0)$から空間的に離れた$t_0$を単位とする2次元球面上の$g(s)$の平均,

1次元：$u(x_0,t_0)=x_0$を囲む空間のt_0を単位とする1次元単位球上の$g(s)$の平均.

同時に基本的な違いもある．$n=3$に対しては，初期データg(またfでさえも)が(x_0, y_0,z_0)にt_0単位の後で到達し，それ以後に影響を残さない．それに対して$n=1$では，初期データgは$t \geqq t_0$のすべての時刻に対する解に影響し続ける．波動初期値問題の解のこの特徴は**Huygensの原理**と呼ばれ，方程式$\square_n u=0$でnが1より大きな奇数のとき，初期データが残存効果を残さずに鋭利な信号のままで現われることを，より一般に主張する．Huygensの原理を考えなくては，無線通信はかなり混乱を起すことになる．なぜなら，初期音波を受信した後にも，その後に受信した信号を分離廃除しない限り，それらを聞き続けざるを得ないだろう．この様に，我々が3次元世界で生活しているのは見かけ上幸運なことである．

Fourier変換を用いてKirchhoffの公式を形式的に導くことで，本節を終えることにする(節2.7.3参照)．与えられた初期値問題は，変換後

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}+(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\hat{u}=0, k\in\Omega_k=R^3, \quad t>0, \\ \hat{u}_t(k_1,k_2,k_3,0)=0, \\ \hat{u}_t(k_1,k_2,k_3,0)=\hat{g}(k_1,k_2,k_3) \end{cases}$$

となる．これは容易に解ける常微分方程式の初期値問題で，その解は

$$\hat{u}(k_1,k_2,k_3,t)=\hat{g}(k_1,k_2,k_3)\frac{\sin|k|t}{|k|}.$$

ここで，$|k|=(k_1^2+k_2^2+k_3^2)^{1/2}$．Fourier逆変換によって，解$u$は

$$u(x,y,z,t)=(2\pi)^{-3/2}\iiint_{R^3}\hat{g}(k_1,k_2,k_3)\frac{e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\sin|k|t}{|k|}dk_1dk_2dk_3.$$

計算の途中で，公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\cos\theta$に注目し，ベクトル記法を用いると，解

$$u(\boldsymbol{x},t)=(2\pi)^{-3/2}\iiint_{R^3}\hat{g}(\boldsymbol{k})\frac{e^{i[\boldsymbol{k}\cdot x+|k|t]}-e^{i[\boldsymbol{k}\cdot x-|k|t]}}{2i|\boldsymbol{k}|}d\boldsymbol{k}$$

は入射平面波と射出平面波の両波動にデータgを乗じて，すべての波数kについて平均したものの変換とみなされる．積分は3次元でとられる．

ここから先へ進めるには，幾つかの方法がある．恐らく最短のものは

$$f * g = \widehat{\hat{f}\cdot\hat{g}}^{-1}$$

なる形式にかかれる節2.7.3の合成積定理を用いるものである. $(\sin kt)/k$が区間$[-t, t]$の特性関数$\chi[-t,t]$の定数倍のFourier変換であることを1次元で示すことは，容易な演習問題であろう．こうして解のFourier逆変換公式は

$$u(x,y,z,t) = (\text{定数})\ \widehat{\cdot\hat{g}\cdot\hat{\chi}_{t}}^{-1}{}_{\text{単位球}}$$

とかかれる．これは合成積定理により，次となる．

$$u(x,y,z,t) = (\text{定数})\cdot\iiint_{R^3}\chi_t(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dy_1dy_2dy_3.$$

極座標に変換し，$\chi_t(\boldsymbol{y})=1(|\boldsymbol{y}|\leqq t), =0(|\boldsymbol{y}|>t)$に注目すると，Kirchhoffの公式が得られる．

問題(*a*) 積分記号のもとで微分することにより，Kirchhoffの公式が実際に初期データ$u_t(x,0)=g$をもつ波動初期値問題の解であることを，細心の注意を払って，確かめよ． (*b*) 初期データ$u(x,0)=f$が同時に存在する問題に対しても，公式$u=u_g+(u_f)_{,t}$が成り立つことを示せ． (*c*) どちらかというと，領域加振データをもつ$\Box_3 u=F(x,t)$の初期値問題を考え，節2.5のd'Alembertの公式と類似の公式を求めることを試みよ． (*d*) Fourier変換に興味をもつ読者に対して，合成積定理を用いてKirchhoffの公式に到った上述の計算を完成させよ．

問題2.9.8 非線形波動およびソリトン

これは物理学と数学の両方の立場から，急成長し，重要性を増している理論であるから，この最後の問題で，非線形波動の理論のある種の基本的な原理を議論したい．ここでの議論は幾つかの例題と基礎的な概念に制限されている*).

1次元線形波動方程式から始めよう．

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty, \\ u_t(x,0)=0, & -\infty<x<\infty, \end{cases}$$

これは次の解をもつ．

*) より進んだ研究に対する勝れた文献は次である．G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley-Interscience, New York, 1974).相似解と群の局所不変性に関する他の素材は本書付録AのA．2とA．3に言及されている．

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}.$$

この解を見出す方法の一つは，この方程式に対する特性曲線（問題1.9.2）に従う次の変数変換に依るものである（節2.5 問題1）．

$$\xi=x+ct,\quad \eta=x-ct.$$

これは波動作用素を

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

の様に因数分解したことに相当する．

すぐ上に述べた立場に立つとき，最も簡単な線形波動方程式は1階の方程式

$$u_t+cu_x=0$$

である．ここでの議論の線上にある最も簡単な非線形波動方程式は，形式

$$u_t+c(u)u_x=0$$

のものであろう．この種の方程式は実際に，多くの現実の問題のモデリングに度々現われ，uがある基礎的流れに関する微小擾乱を表し，局所的な伝播速度がその擾乱に依存する状況に相当する．以下，交通流の混雑の例でこれを考えよう．

上でとられた方法に対して，線形または非線形の波動方程式，あるいはそれらの連立方程式を解くことは，波動方程式を特性座標系へ変換して，d'Alembertの公式を得たと同様，問題の特性曲線に沿う積分を試みることによって進められる．双曲型の方程式やこの型の因数からなる方程式は，双曲型固有の方法による取扱いに敏感であるから，"双曲型"の範疇に入れられる．

第二のそして成長中のクラスの非線形波動方程式はいわゆる**"分散"**方程式である．これらの方程式は"双曲型"であるかもしれないし，更に放物型か混合型でもあり得る．"分散"なる術語は，位相速度が波長に関して有意に一定でないこと，別のいい方をすると，異なる空間的振動の長さをもつモード（解）は異なる速さで伝わることを示している．更に，非線形方程式が形式

$$u(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$$

の解をもつとき，"非線形分散"であるためには，$\omega=\omega(k)$が$\omega''(k)\neq0$の程度までkと共に変化する必要がある．以下，例で説明しよう．

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$$

は解（節2.8で論じた様に）

$$u(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}=A\cos(kx-\omega t)+iA\sin(kx-\omega t)$$

をもち，そこでは，たとえそれが分散的でその位相$\theta=kx-\omega t$がkに依存する位相速度$c=\omega/k$をもつときでさえ，波数k（または波長λ）に線形的に依存する周波数$\omega=ck=2\pi c/\lambda$は“非線形分散”ではない．他方，線形振動する梁の方程式

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0$$

は，次元解析によって振動数と波数の間に$\omega(k)=\pm ck^2$の関係をもち，位相速度$c=\pm\omega/k^2$をもつ“非線形分散”である．いずれの場合も，異なるFourier成分は異なる速さで伝わる．

第三のそして興味あるクラスの非線形波動方程式，**“散逸”**方程式に注目しよう．数学で通常散逸作用素は，(例えばエネルギーの)保存則を満たさない様な物理学的状況に対応する作用素を意味する．通常（例えばエネルギーの）散逸は，連続的な（エネルギー）源によって埋め合わせない限り，解の減衰をもたらす．更に，異なるFourier成分は異なる振幅で伝わる．この型の方程式の重要な例をあとに挙げる．

上に概説した三つの範疇の方程式は，互いに排他的でも個別的でもないが，含まれるいろいろな方程式に対し，直観的に有用な手引きとして役立つ．第2章の最後の節は，上述の三つの型の方程式のそれぞれについて，ある重要な例題を簡潔に見ることで，終らせたい．

(i) **交通流．** $\rho(x,t)$を高速道路上の二点A,B間の点x，時刻tでの車の密度とする．例えば，$\rho(x)$はキロメートル当りの車の数である．連続な密度と（交通量の）保存則

$$\frac{d}{dt}\int_a^b\rho(x,t)\,dx=F(a,t)-F(b,t)$$

を仮定する．これは，高速道路の任意部分区間$[a,b]$にある車輛数の正味時間変化(例えば，分当り3台）がその区間に入る車と出る車の正味流量によって与えられることを述べる．節1.7で熱方程式を導いたと全く同様にして，発散定理を用いて右辺を積分記号のもとで微分すると，

$$\int_a^b[\rho_t(x,t)+F_x(x,t)]\,dx=0.$$

各xで流量Fがxでの密度ρのみの関数であるとの仮定を追加すると，連鎖規則により，$F_x=F_\rho\rho_x$．$c(\rho)=F_\rho$とおき，任意微小区間$[a,b]$上での上記保存則に対し，節1.7と同様の通常の無限小仮定によって，密度方程式は

$$\rho_t+c(\rho)\rho_x=0,\quad A\leqq x\leqq B,\quad t\geqq 0.$$

これは双曲型の方程式である．

全体としての交通流速度は密度依存であり，（流量）／（密度）の次元をもつ．

$$v(\rho)=F(\rho)/\rho.$$

従って，交通流の波動としての伝播速度は

$$c(\rho)=v(\rho)+\rho v'(\rho)$$

によって与えられる．初項は一般的流れの速度を表す．速度$v(\rho)$は密度ρの増加に従って明らかに減少するから，第二項$\rho v'(\rho)$は負である．よって，高密度にある運転者に警告した波が車輌の縦列を逆行するので，伝播速度$c(\rho)$は負である．

実験によって，対数関数的に依存する流量法則が知られている：$F(\rho)=a_1\rho\ln(a_2/\rho)$. ここで，$a_1$と$a_2$は車線数などに依存する定数である．これから，$c(\rho)$は$b_1-b_2\ln\rho$の形をもつ$\rho$の減少関数である．密度の任意の局所的増加は，この縦列の後部附近で衝撃波の形成になって伝わる（図2.9j）.

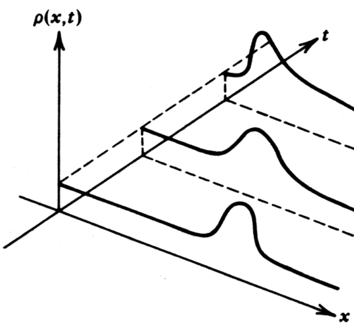


図2.9j

(ii)**Burgers方程式．** 交通流モデル（図2.9jに示されたもの）から次の第二の方程式へ移ろう．νは正のある定数である．

$$u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0.$$

交通流モデルに，“粘性補正”を表す項νu_{xx}が加えられ，これにより運転者はその速度を減じて，前方への密度を増加させることを説明する．この方程式は放物型で，附加的特異摂動項の効果は，その進行中，その解を大きく滑らかにすることである．従って，(i)の型の問題では初めに摂動問題が解かれ，次に$\nu\to 0$として，可能なら，もとの問題の正則性の乏しい解を得る*).

Burgersは粘性圧縮流の１次元モデルの方程式に興味をもった．$\nu>0$に対する解

*)　経験として，少しでも粘性を加えると，非線形方程式の解は滑らかになるし，またしばしば，僅かな非線形性を加えて，線形方程式を安定にすることもできる．粘性あるいは非線形性が本質的に有効であるか否かを決定することは，その適用の綿密な吟味に常に依存する．

は，$\nu=0$の衝撃を表す不連続をもつ解に近づかせ得ることを示した．この方程式は次の保存則を満たす（すなわち，ある座標系でそれは狭義発散である）．

$$(u)_t=(\nu u_x-\tfrac{1}{2}u^2)_x.$$

よって，$\varphi_x=u$かつ$\varphi_t=\nu u_x-\dfrac{1}{2}u^2$を満たす“流れ関数”$\varphi$が存在し，これから

$$\varphi_t-\nu\varphi_{xx}+\tfrac{1}{2}\varphi_x^2=0.$$

次に変数変換 $\ln w=-\varphi/2\nu$*)によって，線形熱方程式

$$w_t-\nu w_{xx}=0$$

が得られ，よってBurgers方程式は解かれた．

(iii) **Born-Infeld方程式．**

$$(1-(u_t)^2)u_{xx}+2u_xu_tu_{xt}-(1+(u_x)^2)u_{tt}=0.$$

この方程式は正と負の速度で運動する波動解をもつ．本書の初めに注目した極小曲面方程式と似ており，双曲型の領域では同様にして（問題1.9.9の演習問題５参照），Legendre変換によって線形波動方程式

$$w_{rs}=0$$

に変換される．

恐らく，２階あるいは“分散”型の最もよく知られた非線型方程式は次である．

(i) **Korteweg-de Vries方程式．** この方程式は

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0$$

で，これは損失なしで伝わる浅水波のモデルであると同時に他の現象のそれでもある．これは保存則

$$(u)_t=(-u_{xx}-\frac{1}{2}u^2)_x,$$

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t=-\left(\frac{1}{3}u^3+uu_{xx}-\frac{1}{2}{u_x}^2\right)_x.$$

*)（訳者注） **Cole-Hopf変換**とよばれる．

そして実際，無限個のこの種の保存則を満たす．それに立ち入ることはできないが，それは多くのこの種の方程式に対して起こることである．

Korteweg-de Vries方程式は，ソリトン解をもつという性質によってよく知られている．**ソリトン**は通常，他のソリトンと相互作用を続けながら，付加的性質をもって伝わる孤立波として定義される．それらが衝突し互いに通り過ぎた後では，共に位相のズレ以外に何も影響を受けずに，同じ形状と同じ速度で伝播する．どうしてこの孤立波がそうなるのかを見ておこう．

速度cをもって伝わる孤立波の解があるとする．すなわち，

$$u(x,t)=u(\xi=x-ct).$$

偏微分方程式に代入して，次の常微分方程式を得る．

$$u_\xi(u-c)+u_{\xi\xi\xi}=0.$$

これを一度積分して，

$$u_{\xi\xi}=c_1+cu-u^2/2.$$

両辺にu_ξを乗じて，二度目の積分を行うと

$$\frac{1}{2}(u_\xi)^2=c_2+c_1u+\frac{c}{2}u^2-\frac{u^3}{6}.$$

三度目の積分によって（非線形振子に対して行った初等常微分方程式の場合にならって），これは楕円積分を用いて陰関数的に解け，

$$\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{2c_2+2c_1u+cu^2-u^3/3}}=x-ct.$$

ここで，u_0は初期値$u(0=x-ct)$である．

次に，任意のこの種の孤立波解uに，それが本当に孤立しており，すなわち特性曲線に沿って局所化され，よってu_ξと$u_{\xi\xi}$は大きなξに対して0であることを課する．よって上の任意定数は$c_1=c_2=0$．すると，上の積分は陽的に計算できて

$$u(x-ct)=3c\ \mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right).$$

(ii)　第二の重要な非線形分散方程式で，固体物性の電子論に現われるものは，**Sine-Gordon方程式**である：

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0.$$

この方程式の非線形性は，uの任意の（とはいえ奇数次の）高べきを含むことに興味がある．

(iii) この理論で歴史的に重要な方程式は**Fermi-Pasta-Ulam方程式**である：

$$u_{tt}-(1+u_x)u_{xx}+u_{xxxx}=0.$$

変数変換$w=u_x$または$w=u_t$によって，この方程式はKorteweg-de Vries方程式に（近似的に）移行される．Fermi-Pasta-Ulam方程式の原型は，格子振動の非線形モデルとしての常微分方程式であった．その数値シミュレーションの結果は期待されたエルゴード的挙動を示さずに，むしろソリトンのそれに類似の非線形モードの振舞いを保つことを示した．

ここでは許される範囲内で，第三のまたは"散逸"型の波動方程式を議論する．神経インパルスの伝播に関する生物学的研究で重要なのは次である．

(i) **Hodgkin-Huxley方程式．** 神経軸索の状態を表す方程式で，次の形をもつ：

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=N(u,w), \\ w_t-A(u)w=M(u). \end{cases}$$

uは膜電位，$w=(w_1,w_2,w_3)$はイオン・コンダクタンスの変化で，膜の透過係数の度合いの測度である．$A(u)$は3×3行列，$M(u)=(m_1(u),m_2(u),m_3(u))$で，共に$u$について非線形，$N(u,w)$は$w$について非線形，$u$について線形である．これらの方程式はかなり複雑で，次の様な単純化がなされた．

(ii) **Nagumo方程式．**

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=u(1-u)(u-\alpha)+\nu w, \\ w_t-u=0. \end{cases}$$

ここで，$0<\alpha<1,\nu>0$. 同一速度で伝わる孤立波解

$$\begin{aligned} u(x,t)&=u(\xi=x-ct), \\ w(x,t)&=w(\xi=x-ct) \end{aligned}$$

を想定して，偏微分方程式に代入すると，次の常微分方程式系を得る．

$$\begin{cases} u'=\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{v}'=-c\boldsymbol{v}-u(1-u)(u-a)+\nu w, \\ w'=-c^{-1}u. \end{cases}$$

孤立波の局所化の要請によってまた，上記のKorteweg-de Vries方程式と同様，u，w，u_ξ，w_ξは漸近的に0にならなければならない．よって，この常微分方程式系は，問題1.9.8の相図の方法によって取り扱える．（0，0，0）から出発して，同

じ点の近くに端点が存在する様に，伝播速度cを見出したいのである[*]．

(iii) **非線形拡散方程式．** 伝播する波動解が道筋$\xi=x-ct$に沿ってのみ存在することは必要でない．例えば，連続入力のもとでの多孔質媒質中の流れの多くの応用や，化学や生物学の他の問題において，正方形やほかの道筋に沿って解を見出す．(節1.7の線に沿う) 特定の例題，すなわち，初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t-(k(u)u_x)_x=0, & 0\leqq x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=f(x), & 0\leqq x<\infty, \\ u(t,0)=\alpha, \\ u(t,\infty)=0 \end{cases}$$

に注目しよう．ここで，$k(u)\geqq 0$は解に依存する拡散係数，$\alpha>0$は媒質の無限帯領域$(0\leqq x<\infty)$の左側に沿って保持された (例えば濃度) 境界値であり，濾過過程が$x\to\infty$のとき漸近的に減少すると考えられており，$f(x)$は初期濃度である[†]．

問　題 (a)　交通流問題で，図2.9jに示されたある単位による好適な対称密度断面$\rho(x,0)$を考え，伝播速度を$c(\rho)=76.184-17.2\ln\rho$にとって，衝撃がいかに直後にかつどこで成長するかを (数値的にまたは他の方法で) 決定せよ．(b) 線形熱方程式の解からBurgers方程式の解へ示された様に遡れ．(c) Korteweg-de Vries方程式のソリトン解を求めるとき行なった積分演算を確かめ，解を描け．(d) 上の非線形拡散問題に対し，形$u=u(\xi=x/\sqrt{t+1})$で伝わる波動解を仮定し，それに関して偏微分方程式を常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\xi u_\xi+(k(u)u_\xi)_\xi=0, & 0<\xi<\infty, \\ u(0)=\alpha, \\ u(\infty)=0 \end{cases}$$

に変形し，この問題をある指定されたデータ$f\geqq 0$かつ$k(u)=u$に対して解け．(e)付録A.1の理論を介して，問(a)の交通流問題を眺めよ．

問題2.9.9　確認のための演習問題

本書の重要な部分を完了した読者は皆，次の三つの演習問題を試みるべきであり，また，多くの活用のために問題9をも試みよ．

*)　この問題の幾つかの結果については，例えば次を見よ．S. Hastings, "Some mathematical problems from neurobiology," *Am. Math. Monthly,* **82** (1975), 881-895.

†) この種の問題は"濃度－拡散"方程式と呼ばれる．特に重要なものは，多孔質方程式$u_t=(u^m)_{xx}$で，それは後ほど問題A.5とA.6で扱われる．困難は，拡散係数$k(u)$が0に近いときに生ずる．他のクラスの非線形方程式，導関数部分が線形である反応－拡散方程式に対しては次を見よ．P. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems,* Lecture Notes in Biomathematics, **28** (Springer, Berlin, 1979).

1. (a) 次の振動膜問題を，変数分離法で解け．

$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{xx}+u_{yy})=0,\ (x,y)\in\Omega=\{(x,y)|0<x<\pi,\ 0<y<\pi\},\ t>0, \\ u=0,\ x\in\partial\Omega,\quad t>0, \\ u(x,y,0)=f(x)f(y),\quad f(s)=\begin{cases} s, 0<s\leqq\pi/2, \\ \pi-s, \pi/2<s<\pi, \end{cases} \\ u_t(x,y,0)=0. \end{cases}$$

(b) $f(s)=s^2, 0<s<\pi$に対して問(a)を繰り返せ．初期データはその解に関して何んらかの不安を抱かせることはないか？

(c) $\Omega=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1\}$, $f(s)=s(1-s), 0<s<1$とおいて，問(a)を繰り返せ．

(d) $\Omega=\{(x,y)|0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$で，各項点が一定温度（ここでは0に規格化しておく）に保たれているとする．Ωの内部は熱源がなく，頂点と底辺が完全に絶縁されていると仮定する．初期温度を$u(x,y,0)=f(x,y)$として，$t\geqq0$に対する温度$u(x,y,t)$を求めよ．

(e) 問(d)で，$f(x,y)=f(x)f(y)$の場合を解け．ただし$f(s)=s,\ 0<s<\pi$.

(f) 問(e)の初期温度分布を解け．次に$t=1$に対する解の数個の値を計算し，それを図に示せ．

(g) 問(a)の振動膜は，その解がtについて周期的であるとき，音調を発することを述べている．それが$f(s)=\sin ks$（k:任意整数）の場合であることを示し，その解と周期を見出せ．

2. (a) 次の固有値問題を解け．

$$\begin{cases} -u''=\lambda u,\quad 0<x<\pi, \\ u(0)=u(\pi), \\ u'(0)=u'(\pi). \end{cases}$$

(b) 問(a)に対する固有値の重複度について論ぜよ．$n-1$個の節点（すなわち，内部の零点）をもつ固有関数を$\varphi_n(x)$とするとき，初めの数個を描け．

(c) 節2.4で考えた分離型の境界条件はあるか？

(d) その問題は自巳共役であるかどうか？

(e) Rayleigh型方程式

$$-u''=\lambda u,\quad 0<x<\infty$$

を考え，それが極限円型か極限点型かを決定せよ．

(f) 2乗可積分性について注釈し，λが実数と複素数に対して，問(a)の問題を完全に解け．

(*g*)　次の3次元弾性球Ω上のDirichlet問題を変数分離法で解き，Legendre方程式に到れ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} \quad \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上で} \quad u=f. \end{cases}$$

3．(*a*)　(i)次の1次元振動弦問題を変数分離法で解け．

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=0, & -\infty<x<\infty, \\ u_t(x,0)=g(x), & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

(ii)特に$g(x)=\sin x$に対して解け．　(iii)次に，$g(x)=x\sin x$について解け．

(*b*)　積分法，すなわち，Green関数法で解け．

(*c*)　解に適当な減衰仮定を与えて，この弦の全エネルギーが弦の振動部分全体で保存されていることを示せ．

(*d*)　Fourier変換で，問(*a*)を解け．

(*e*)　問(*a*)に対して，初期条件を$0\leqq x\leqq\pi$で$u_t(x,0)=0$と$u(x,0)=x(\pi-x)$におきかえ，すべての$-\infty<x<\infty$へ奇関数的に延長する．このデータを用いて，波動作用素がポテンシャル作用素や熱作用素の平滑化の性質を欠いていることを示せ．

(*f*)　節2.6の正方形厚板に対するDirichlet問題で，データ$f(x)$をΩ上$f_e(x,y)=f(x)(1-y/3)$へ延長せよ．f_eはなぜ解ではないのか？f_eを数値解や解析解(すなわち変数分離解）と比較せよ．

(*g*)　節2.6で与えたDirichlet問題に対するRayleigh-Ritz近似法で，$D(u_{N+1})\leqq D(u_N)$を直接証明せよ．

次の問題は補足的情報を含み，内容的にも困難さもいろいろである．

4．(*a*)　$H_0^1(0,1)$級関数が連続であるという節2.6問題3の結果を他の方法で示せ．

(*b*)　$u\in H_0^1(0,1)$のとき，$|u|\in H_0^1(0,1)$を示せ．

5．(*a*)　上半平面Ωに対する2次元Dirichlet問題

$$\begin{cases} \Omega(y>0)\text{内で，} \ \Delta u=0, \\ \partial\Omega(y=0)\text{上で，} \ u=f \\ x^2+y^2\longrightarrow\infty\text{のとき，} \ u\longrightarrow 0 \end{cases}$$

を考えよ．これの解に対するPoisson積分公式

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-s)^2+y^2}f(s)\,ds$$

を何らかの方法で導け．

(*b*)　これからこの問題に対するGreen関数$G(P,Q)$をかき下ろせ．

(*c*) “スペクトル族” $E(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty)$をもつ任意の自己共役作用素$L$のスペクトル理論への一般的応用に対して，レゾルベント作用素$R_z=(L-z)^{-1}$に対する“行列要素” $\langle R_z h, h\rangle$は次の非常に重要な性質をもつことを示せ.

$$\mathrm{Im}\langle M_z h,h\rangle=\varepsilon\|R_z h\|^2=\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(\lambda-s)^2+\varepsilon^2}\frac{d\langle E(\lambda)h,h\rangle}{d\lambda},\quad z=\lambda+i\varepsilon.$$

6. “擬微分作用素”の理論は偏微分方程式の研究において有用な道具である．そこで展開された発想は，変換法によって偏微分方程式の解に関係づけられる．例えば，Poisson問題

$$R^3において\quad -\Delta u=f$$

に対して，Fourier変換による解は節2.7から

$$u=F^{-1}|k|^{-2}(F(f)).$$

これは合成作用素を単独作用素として考えて，擬微分作用素の表現で

$$u=T^{-1}f$$

と表してよいだろう．不幸なことに，“表象” $|k|^{-2}$はよくない．Poisson問題を直接解いて，

$$f=(F^{-1}|k|^2F)u=Tu.$$

これはよい“表象” $|k|^2$を与える．広いクラスの記号$p(x,k)$に対して

$$p(x,D)u=F^{-1}p(x,k)Fu$$

を含む一般的な擬微分作用素を考えることができる．

(*a*) 擬微分作用素*)に関する多くの情報について最近の文献を学習せよ．

(*b*) 他の型の積分変換に関する古典的文献を読んで，それらを擬微分作用素に結びつけよ．

(*c*) Fourier積分作用素†)は最近再び発展しつつあり，それはFourier変換核$e^{i\lambda x}$を$e^{i\phi(\lambda)x}$でおきかえることに相当すると考えられる．このことについて考察し，

*)および†)（訳者注）擬微分作用素とFourier積分作用素に関する文献は数多い．ここでは，定評ある標準的参考書として，次のものを挙げよう．A. Nagel and E.M.Stein. *Lectures on Pseudo-differential Operators: Regularity Theorems and Applications to Non-elliptic Problems, Mathematical Notes* (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1979)；F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, Univ. Ser. in Math.*, I and II (Plenum Press, NewYork, 1980), H. Kumanogo, *Pseudo-Differential Operators* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1981)（本書は熊の郷準；擬微分作用素（岩波，1974）を原著とし，英訳書の出版に際し，大幅に増補された）．

一般固有関数展開を用いて，それが何を意味するか考えよ．

7． $\Omega=R^3$，$\lambda>0$とする．$L^2(\Omega)$でHelmholtz方程式

$$\Omega\text{で}\quad(-\Delta-\lambda)u=f$$

を考えよ．原点中心で，半径Rの球$B(0,R)$の特性関数を$\chi_R(0)$とする：

$$\chi_R(0)=\begin{cases}1, & x^2+y^2+z^2\leqq R^2,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>R^2.\end{cases}$$

(*a*) 特性関数$\chi_R(0)$は，Helmholtz作用素の値域にあって，他にないことを示せ．

(*b*) その値域にあるものを厳密に見出せ．

(*c*) そのとき，test関数$C_0^\infty(R^3)$はその値域にすべて属するかどうかについて，何を疑えばよいのか？*)

8． 問題2.9.8で議論された非線形モデルに見られた非線形性の特徴を示さない神経軸索方程式の興味ある線形モデルがある． ポテンシャルφをもつ保存電場$E=-\mathrm{grad}\varphi$と，神経を無視できる程薄い膜で囲まれた円柱形の芯として視られるモデルを仮定する．すると，古典的双極子表面ポテンシャル論とGreen等式を用いて，（末端効果を無視すると）次を得る．

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|P-Q|}\right)\left(\varphi_0(Q)-\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\varphi_1(Q)\right)ds_Q.$$

ここで，$\partial\Omega$は神経の外表面，$\varphi(P)$は外部（細胞外）ポテンシャル，φ_0は外表面ポテンシャル，φ_1は内表面ポテンシャル，σ_0は外部伝導率，σ_1は内表面伝導率である．電位固定法によって，より後のデータはある拡がりまですべて測定可能である．

(*a*) 偏微分方程式の古典的双極子ポテンシャル論をさらに深く研究せよ．

(*b*) 興味あれば，神経モデルについて突込んで学習せよ†)．

次の演習問題は，本書第2章全体にわたって学習したものを補足するものとして用意された．

*) より詳しくは次を見よ．K. E. Gustafson and G. Johnson, “A Study of the Helmholtz operator”, Proceedings of the Boulder AMS Special Session on Topics in Mathematical Physics, *Quantum Mechanical Problems in Mathematics, Chemistry and Physics* (Plenum, New York, 1981).

†) 例えば，C. Stevens, *Neurophysiology: A Primer* (Wiley, New York, 1966).

9. (1)　変数分離法によるODE解が，常に，PDE解の無限和にまとめられると考えてはいけない．次の境界条件として，(a)Neumann条件をもつ問題を，(b)Robin条件をもつ問題と比較せよ．

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, -\pi<x<\pi, \\ u(x,0)=1+\cos x. \end{cases}$$

(a):　$u'(-\pi,t)=u'(\pi,t)=0.$

(b):　$\begin{cases} -u'(-\pi,t)+2u(-\pi,t)=0, \\ u'(\pi,t)+2u(\pi,t)=0. \end{cases}$

(2)　１次元の量子力学的調和振動子の〝基底状態〟を，Rayleigh-Ritz試行関数

$$\phi(x)=\begin{cases} 1-x^2/l^2, |x|\leqq l, \\ 0, \qquad |x|>l \end{cases}$$

によって近似せよ．

(3)　節2.2の議論に沿って，節2.5で言及した極表示部分和の収束性$s_N(r,\theta)\to u(r,\theta)$を証明せよ．

(4)　節1.6.1で与えた３次元の場合の証明を参照しながら，Ωが２次元領域のとき，$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$に対する等式

$$u(p)=\frac{-1}{2\pi}\iint_\Omega \ln\frac{1}{r_{PQ}}\Delta u+\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega}\ln\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n_Q}-\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)$$

を示せ．

(5)　座標軸に平行な平面の開正方形で，辺長がnでその南東のかどの点がx軸上の$(n^2,0)$にあるものをΩ_nとする（図2.9k）．Ωをそれらの結び$\cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$とする．

(a)　次の問題のすべての固有値λ_iを見出せ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\quad -\Delta u=\lambda u, \\ \partial\Omega\text{上}\quad u=0. \end{cases}$$

(b)　作用素のスペクトルが閉集合でなければならないとするとき，いかなる結論がなされるか？

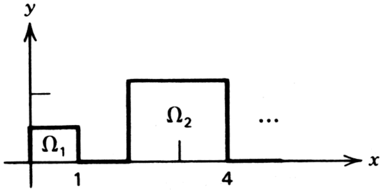


図2.9k

(6)　Ωを全空間R^n，$u\in C^2(\Omega)$，Ω上で$\Delta u=0$とする．uは恒等的に0でないと仮定する．このとき，$\int_\Omega u^2$は，存在しないことを示せ．

(7)　依存領域と影響領域を考慮して，d'Alembertの公式が波動初期値問題に対して境界条件を調整させるために，どのように用いられたかを示せ．

(8)　節1.3問題3の方程式，$u_{xx}+4xu=16$にもどって，これが火線，流体動力学および他の応用の偏微分方程式に現われるAiry型の方程式であることを示せ．よってこの解はAiry関数を用いて，表すことができる．いかなる応用にも現われず，解をもたないODE二点境界値問題をかき下ろせ．

(9)　非線形偏微分方程式がどんなことをしても解けない場合が，しばしば見られる．本書の最初に注目した極小曲面方程式に，再びもどろう．すなわち

$$(1+(u_y)^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+(u_x)^2)u_{yy}=0.$$

(a)　ヘリコイド(螺旋面)とカテノイド(懸垂面)が解であることを確かめよ．

(b)　コンピュータ・グラフィクスの助けをかりて，最近得られた第三の型の完全に埋め込まれた極小曲面*)について学べ．

(c)　次の“加法的変数分離”を試みて，新しい局所解を得よ．

$$u(x,y)=X(x)+Y(y).$$

(d)　節2.9.8のBorn-Infeld方程式と，問題1.9.9.4(c)のスライシング方程式について，同様の工夫を試みよ．

*)　広汎にわたる解説が*Science News*,**127**　(1985,　3月16日号) に与えられた．これらの曲面の格好なカラー・グラフィクスとして，次もまた参照せよ．*Omni Magazine*, 8 :7,1986,pp.88-90. グラフィックスは，非線形偏微分方程式の解を理解させる有力な道具になりつつある．節1.2問題1および節2.1問題2のラプラシアンの解と極小曲面の解の間の“垂れ下がり”の違いをグラフィックスで描いたものについて，付録B.3を参照．

第３章

付　録

・・・過去，現在，そして未来・・・

説明の都合上，本書の最後のこの場所に次に三つの重要な題材を置いて，それらの導入をはかった．

A．１階偏微分方程式

B．電算的方法

C．高等流体動力学

これらの内容は第三学期課程の中心部分である．許されるなら，第二学期課程あるいは第一学期課程にも入れたいところである．継続的にそれらの展開がじかに本書の他の部分にも関連するけれども，柔軟性を保てるように，本質的に自己充足な形でかかれた．

（A）　１階偏微分方程式の扱いは，特性曲線の概念と密接に結びついている．最初本書の始まりの偏微分方程式の分類を行った所で出会った(節1.1，節1.9.1，節1.9.2を参照)．非線形方程式(例えば，節1.8，節1.9.8，節2.9.8で扱われた)に対して，非常に重要な関連概念は自己相似解のそれである．この解を完全に理解するため近年の試みとして，局所変換群の理論がある．それは最初Lieによって導入された線に沿って著しい発展を見せている．

（B）　最近の高速計算機技法の急激な進歩は，電算的方法を用いて，厄介な偏微分方程式を実用的に解けるようにしたことに手をかしている．三つの主たる電算的方法—差分法，有限要素法，(有限)スペクトル(最小２乗)法—が節2.6で既に述べられた．ここでは，それらを実行するときの基礎的要素の幾つかを，重要な現代的スキームに触れながら，導入する．そこでは，必ずしもたどる必要のない選択枝として，その具体的なコーディングには触れない．

（C）　流体動力学は偏微分方程式の最近の研究の重要な分野である．例えば，ある雑誌全体が今や電算流体動力学に専有された感もある．この最後の付録で，この話題の重要な部分(すなわち，Navier-Stokes方程式)に対して，最近の技術的な成果

を垣間見ることにしよう.

付録A，B，Cはいずれも，三つの部分にまとめられている．ある意味で，それらの部分，第1部，第2部，第3部は偏微分方程式の過去，現在，未来の研究の反映として認められてもよいものであろう.

付録A.　1階偏微分方程式

characteristicなる用語は数学で使用過剰である．フランス語のcharacteristic vectorはドイツ語のeigenvectorの意味で用いられ，少なくとも，後者は形容詞のcharacteristicを意味付ける際に生ずる混乱を少なくさせている．他方，1階偏微分方程式あるいは方程式系を扱うとき，characteristic curve, characteristic directions, characteristic manifolds, characteristic strips, characteristic surfaces, method of characteristics, characteristic data等々の術語の使用は根深くてその主題の必須かつ重要な部分を構成する程である.

1階の方程式および方程式系を扱うための原理は，物理学，工学，科学の階数2以上の偏微分方程式に共通に遭遇するものと，多くの過程で異っている．後でわかるように，それは非線形常微分方程式系の理論で見出される立場により近い．これまで力点をおいたものと違った部分にあるので，また，個々の研究が時間の浪費になってしまうかも知れないので*)，それらを扱えるこの場所まで延ばしてしまった.

この最初の付録第1部†)で，1階偏微分方程式の理論の幾つかの要点が述べられる．次の第2部で，重要な話題すなわち，1階と高階の方程式の自己相似解の理論へと移る．近年，著しく発展しかつ用いられている偏微分方程式の変換群の取扱いの一般的理論に対する初歩が第3部で与えられる.

この付録の第1部から第3部までは密接に関係している．本書全体が丁度それぞれの部分についてかかれたかあるいはかかれているので，ここでの目標は基本的な考え方へ気楽に近づいてもらうことであって，一般論を目指してはいない.

A.1　偏微分方程式から常微分方程式へ

1階偏微分方程式は，常に常微分方程式系へ帰着される．偏微分方程式に滑らかさをほんのわずか仮定するだけで，常微分方程式を媒介としたその可解性が原理的に保証される．しかし，多くの興味ある幾何学的な考察が現われ，その方程式を完全に積分することは，常に自明と見なされるべきでない.

この点に関して，読者は常微分方程式の序章を思い出して欲しい．それで，次の復習的な演習を試みられたい.

*)　実際，著者は学生当時，偏微分方程式の入門過程で，学期全体を通しても，1階の方程式および方程式系を全く超えられなかったことを想い出す.

†)　ここの第1部が本質的に本書初版の付録であった.

問題A.1

(*a*) 次の1階非同次線形方程式の初期値問題を，積分因子法で解け．

$$\begin{cases} u'(x)+p(x)u(x)=q(x), \\ u(x_0)=u_0. \end{cases}$$

(*b*) 次の初期値問題が解をもたないことを示せ．

$$\begin{cases} u'(x)=f(x,u), \\ u(0)=u_0, \\ f(0,u)=0,\ f(x\neq 0,u)=1. \end{cases}$$

(*c*) 次の初期値問題をべき級数法で解き，最初の五つの係数を求めて，収束半径を決定せよ．

$$\begin{cases} u'(x)=e^{xu(x)}, \\ u(0)=0. \end{cases}$$

一般的にいって，1階偏微分方程式は通常初期値問題として提出され，処理される．未知関数と1階導関数について2回連続可微分ならば，それ以上の解析的性質は，それらの局所可積分性に対し，必要でなくなる．むしろ，それらの完全可積分性に対して必要になるものは，後で述べられる意味で，初期データが特性的でないことである．

二独立変数の一般の1階準線形偏微分方程式

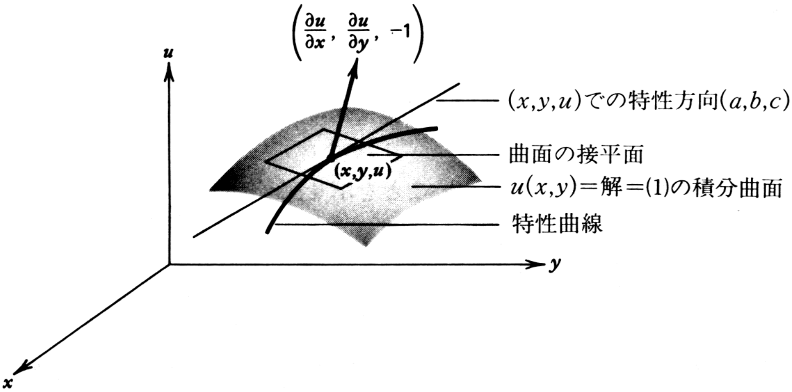
$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u) \tag{1}$$

を考えよう．図A.1から始めるとよいだろう．式(1)の解$u(x,y)$は，3次元ベクトル(x,y,u)として，3次元ベクトル$(\partial u/\partial x,\partial u/\partial y,-1)$と，対応する直交3次元ベクトル$(a,b,c)$とを定める．ベクトル$(a,b,c)$は$(x,y,u)$での**特性方向**と呼ばれる．この様に，$x,y$がこの平面内の領域を動くとき，解$u(x,y)$は，各点$(x,y)$で曲面$u(x,y)$に接する平面にあるベクトル場$(a,b,c)$を定める．いいかえると，$(x,y,u)$空間内の曲面としての解$u(x,y,u)$が式(1)の解であるための必要十分条件は，方向場$(a(x,y,u),b(x,y,u),c(x,y,u))$が各点$(x,y,u)$での接平面上に存在することである．これが(1)の任意の解に必然的な幾何学である．

さて，初期値問題

$$\begin{cases} au_x+bu_y=c, \\ u=\ell(x,y) \quad (\ell\text{:与えられた曲線}) \end{cases}$$

を考えよう．これは，uがパラメータ$t\,(t\in[a,b])$の初期曲線として与えられることを示す．

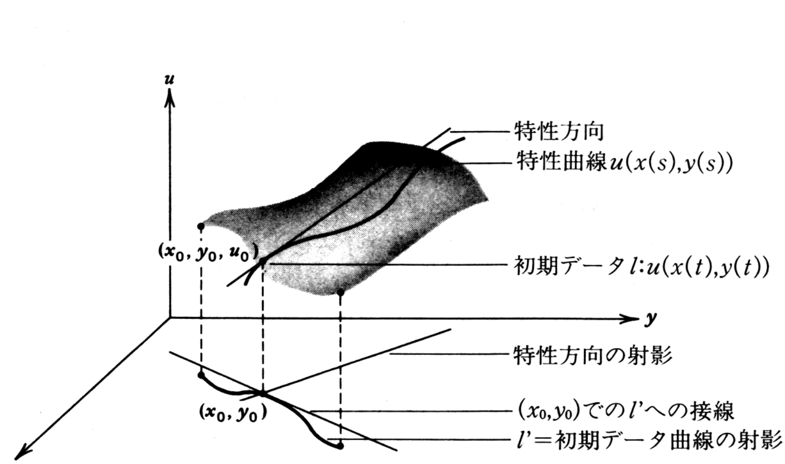


図A.1

$$\ell\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right\} \ell', \\ u=u(t). \end{array}\right.$$

ここで，将来参照するために，ℓ'はx,y平面の上へ下ろしたℓの射影である．初期的に与えられた曲線ℓを延長して，x,y平面上の解$u(x,y)$を表わす積分曲面の中へもっていきたい．図A.2を参照せよ．ここでは，簡単のため，ℓから延長される積分曲面を一方向にのみ描いた．

この初期値問題が適切であるのは，初期データ曲線ℓが特性的でないとき，すなわち，特性方向の射影直線が初期曲線の射影ℓ'の接線に含まれないときである．ここで，この事実を定理として述べ，略証を与えよう．



図A.2

定理

C^1級の初期曲線をもつ方程式(1)$au_x+bu_y=c(a,b,c\in C^1)$に対して，$\ell'$に対する接線が特性方向の射影直線でないとき，$\ell'$の近傍で解が一意的に存在する．

C^1条件はあとで見る様に，逆関数定理を用いるときに必要となる．

さて，上述の定理が何故そうなのかを見よう．既に解$u(x,y)$が積分曲面として知られていると考えて，点(x_0,y_0,u_0)を初期曲線ℓ上に固定する．点(x_0,y_0,u_0)から放射される特性曲線$(x(s),y(s),u(x(s),y(s)))$を，上述の様にパラメータsで表す．式(1)から必然的にこの特性曲線に沿って，方程式

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c$$

を満たさなければならない．特性方向の射影直線は方向係数(a,b)をもち，よって，方程式の左辺は丁度特性方向に於けるuの方向微係数である．従って，式(1)によって

$$\left(\frac{du(x(s),y(s))}{ds}\right)_{(a,b)}=c(x(s),y(s),u(s))$$

が要請される．ここで，左辺は特性方向(a,b)のuの方向微係数を表す．ℓ'の接線が特性方向の射影直線に一致するとき，上式を積分することができず，同時にℓから積分曲面の中へ移すことができない．すなわち，ℓ'上そしてℓ内に，$u(x(s),y(s))=u(x(t),y(t))$を拘束する．これが上の定理の使える理由である．なぜなら，すべての他の場合でも，上の方向微係数を積分することができ，初期データ曲線ℓから移動させ得るからである．

このとき，特性曲線$u(x,y)$を一意的に決定できることは，常微分方程式の一意的な可積分性と逆関数定理からわかる．sを特性曲線の射影に対する座標パラメータとする．定理の非接条件によって，sはtに依らない．すなわち，$t_0\in[a,b]$を固定し，対応する(x_0,y_0)をℓ'内に，(x_0,y_0,u_0)をℓ内にとり，$s=0$とおく．すると，次の常微分方程式系が考えられる．

$$\begin{cases}\dfrac{dx(s)}{ds}=a(x(s),y(s),u(x(s),y(s))),\\[2mm] \dfrac{dy(s)}{ds}=b(x(s),y(s),u(x(s),y(s))),\\[2mm] \dfrac{du(s)}{ds}=c(x(s),y(s),u(x(s),y(s))),\\ x(0)=x_0,\\ y(0)=y_0,\\ u(0)=u_0.\end{cases}$$

C^1級の右辺をもつこの初期値問題は，小さなsに対して一意的なC^1級の解をもつ．

tがaからbまで動くとき，初期点$(x_0(t),y_0(t),u_0(t))$は初期データ曲線ℓを動き，上の系の解である特性曲線$(x(s),y(s),u(s))$はtに依存して

$$\begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \\ u = u(s,t) \end{cases}$$

とかける．sとtが仮定された非接条件により独立であるから，そのヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial x(s,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial y(s,t)}{\partial t} \end{vmatrix}$$

は，$s=0$と$t \in [a,b]$で消えない：

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|_{\substack{s=0 \\ t\in[a,b]}} = a(x_0(t),y_0(t),u_0(t))\frac{dy_0(t)}{dt} - b(x_0(t),y_0(t),u_0(t))\frac{dx_0(t)}{dt} \neq 0.$$

従って，逆関数定理によって，$s=0$，$t \in [a,b]$の近傍で，sとtはxとyの関数として表され，よって解$u(s,t)$がℓ'の近傍で積分曲面$u(x,y)$としてかかれる．

$$u(s,t) = u(x(s,t),y(s,t)) = u(x,y).$$

要約しておこう．a，b，cがすべてC^1級のODEの系が与えられたとき，各$t \in [a,b]$に対してsで表された局所解が得られる．初めの二成分$x(s,t)$，$y(s,t)$のみを考え，逆に，$s(x,y)$，$t(x,y)$が得られる．$t(x,y)$の依存性は既にℓ'に表されており，座標の変換を行って原理的に$s(x,y)$と対応する$u(x,y)$を得たのであった．積分曲面$u(x,y)$は，C^1級関数であるとの意味で，実際に曲面である．これは，$u(x_0(t),y_0(t)) = u(0,t) = u_0(t)$であるから，初期データを満たす．それは，

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= a(u_s s_x + u_t t_x) + b(u_s s_y + u_t t_y) \\ &= u_s(as_x + bs_y) + u_t(at_x + bt_y) \\ &= u_s(x_s s_x + y_s s_y) + u_t(x_s t_x + y_s t_y) \\ &= u_s(s_s) + u_t(t_s) \\ &= u_s(1) + u_t(0) \\ &= c \end{aligned}$$

であるから，偏微分方程式(1)を満たす．

次の例を考えよう：

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1, \\ \ell : x_0(t) = t, y_0(t) = t, u_0(t) = t/2, \quad 0 \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

初めに，非接条件を調べる．この例では，$a=u$，$b=1$，$c=1$，そして

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x_0(t),y_0(t))}{\partial(0,t)} &= a(y_0(t))_t - b(x_0(t))_t \\ &= u_0(t)(y_0(t))_t - (x_0(t))_t \\ &= (t/2) - 1\end{aligned}$$

であり，このヤコビアンは$t \in [0,1]$で消えない．同伴ODE初期値問題

$$\begin{cases} x_s = u \Rightarrow x(s,t) = s^2/2 + u(0)s + x_0(t) = s^2/2 + st/2 + t, \\ y_s = 1 \Rightarrow y(s,t) = s + y(0) = s + t, \\ u_s = 1 \Rightarrow u(s,t) = s + u(0) = s + t/2, \\ x(0) = t, \\ y(0) = t, \\ u(0) = t/2 \end{cases}$$

は(上掲の式を上の方へたどることによって)解かれる．解$u(x,y)$は，sとtでではなくxとyでかくと，容易に次のように求まる．

$$u(x,y) = \frac{2y - x - y^2/2}{2(1 - y/2)}.$$

問題A．2

(a)　ℓ, ℓ'，解$u(x,y)$を指定して，上の例を説明せよ．$u(x,y)$が微分方程式(1)の解であるのは，どんな(x,y)に対してか？

(b)　先の議論で，非接条件が初期曲線ℓに沿ってすべて満たされることを仮定した．他にも三つの可能性がある：(i)まず，ヤコビアンがℓ'に沿ってすべて消えるが，それにもかかわらず初期値問題は解をもつ．このとき，初期データ曲線ℓはそれ自身特性曲線であって，この問題は実際に無限個の解をもつ．(ii)ヤコビアンがℓ'に沿ってすべて消えて，解は存在しない．(iii)ヤコビアンがℓ'の真部分集合で消える．

(i)　$\ell: x_0(t) = t^2/2,\quad y_0(t) = t,\quad u_0(t) = t,\quad 0 \leqq t \leqq 1$

に対して上の場合(i)が成り立つことを示せ．すべての解を求めて，その幾つかを図示せよ．

(ii)　$\ell: x_0(t) = t^2,\quad y_0(t) = 2t,\quad u_0(t) = t,\quad 0 \leqq t \leqq 1$

に対して上の場合(ii)が成り立つことを示せ．何んらかの方法で解くことを試み，何が起こるかを見よ．

(iii)　上の例を $0 \leqq t \leqq 3$ に対して調べよ．

(c)　問(b)の(i)～(iii)を除く場合に対して，方程式(1)の解曲面と一点を共有する任意の特性曲線は積分曲面内に完全に含まれることを示して，一意性の証明を与えよ．

独立変数二個の一般的な1階偏微分方程式

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

は同様にして研究されるし，さらに，独立変数n個の方程式

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n})=0$$

も，従属変数が一個以上をもつ方程式系に対しても，同様に扱われる．こうして見出された理論は膨大であり，ここでは展開しない．この付録A.1を閉じるにあたって，$n=2$の場合に限って幾つかの注意を与えよう．

かなり一般的な記法を採用して，一般の1階方程式は

$$F(x,y,u,p,q)=0,\quad p=\frac{\partial u}{\partial x},\quad q=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$

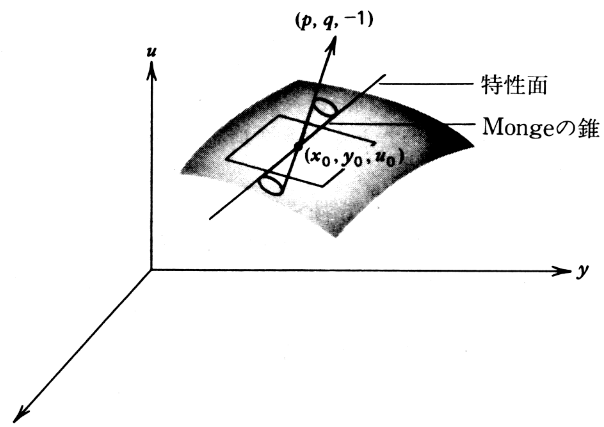
の形にかかれる．方程式(1)の特殊な準線形の場合に対する幾何学的描像と同様，点(x_0,y_0)での接平面は次式で与えられる（図A.1参照）：

$$(p,q,-1)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ u-u_0 \end{pmatrix}=0.$$

ここで，$(p,q,-1)$はこの平面の法線の方向係数である．式(2)でx_0,y_0,u_0の値が与えられると，その点でpの異なる値に対してqの異なる値が知られ，よって，pでパラメータ化された1-パラメータ族が得られる．接平面の作る包絡面は(x_0,y_0,u_0)における方程式(2)の**Monge錐**と呼ばれる．Monge錐の軌跡は次式で表される：

$$\begin{cases} p(x-x_0)+q(y-y_0)-(u-u_0)=0, \\ (x-x_0)+\dfrac{dq}{dp}(y-y_0)=0. \end{cases}$$

ここで，第二式は第一式をpについて微分し，$du/dp=0$なる事実によって得られる．この$du/dp=0$の条件は，pの定義とuが接平面上にあることからわかる．



図A.3

準線形の場合，方程式(1)は特性方向の直線のベクトル場を与える．これらの直線は退化Monge錐である．よって，一般の方程式(2)は図A.3に示される錐体の場を記述する3次元空間における曲面が方程式(2)の解であるのは，錐体が点から点へと動くにつれて，その曲面が錐体に接し続けるときで，そのときに限られる．

特定の方程式を実際に扱うには，方程式(2)をpに関して微分し，dq/dpについて解き，それによってMonge錐を得る．$F(p,q)=0$から

$$\frac{dF}{dp}=\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{dq}{dp}=0.$$

この式と上式を決定するMonge錐とから，積分曲面とMonge錐の交わりに対する接触直線の方程式が得られる．すなわち，

$$\frac{x-x_0}{F_p}=\frac{y-y_0}{F_q}=\frac{u-u_0}{pF_p+qF_q}.$$

さて，方程式(2)に対応する初期値問題

$$\begin{cases} F(x,y,u,p,q)=0, \\ u=\ell(x,y)\text{:与えられた曲線} \end{cases}$$

にもどって，準線形の場合と全く同じく進めると，固定された各tに対する次の同伴常微分方程式の初期値問題を考えることに帰着する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=F_p, \\ \dfrac{dy}{ds}=F_q, \\ \dfrac{du}{ds}=pF_p+qF_q, \\ x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

この方程式系は未知関数五個に対して，三個の方程式しかない．そこで，方程式(2)を陰関数的に微分して得られる方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{ds}=-(F_x+pF_u), \\ \dfrac{dq}{ds}=-(F_y+qF_u) \end{cases}$$

を加える．ここで，pとqに対する初期値は，初期曲線上何んらかの方法で見出されたと仮定する．すると，(2)は，これら五個の方程式から原理的に可積分となる．

実用的には，一般のMonge錐，接触直線の方程式等々を求める必要がなく，むしろ，次の様に解き進めればよい：

1．　ℓに沿って，偏微分方程式

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0$$

と，　ℓに沿って，いわゆる“成帯条件”

$$\frac{du_0}{dt}=p_0\frac{dx_0}{dt}+q_0\frac{dy_0}{dt}$$

を満たす$p_0(t)$と$q_0(t)$を求める．

2．ヤコビアンの“非特性”条件

$$F_{p_0}\frac{dy_0}{dt}-F_{q_0}\frac{dx_0}{dt}\neq 0$$

がℓに沿って満たされることを確かめる．

3．上にかかれた五個の常微分方程式を初期値問題として積分する．このとき一般的な条件の下で，初期データ曲線ℓの近傍で偏微分方程式(2)の一意的な（すなわち，与えられた(p_0, q_0)の各対に対する）解が保証される．例えば，x, y, u, p, qに関して式FがC^2級であること，$F_p^2+F_q^2\neq 0$，よって特性曲線がx, y平面に決して直交しないこと，初期曲線ℓが$t\in[a, b]$に対してC^2級であること，C^1の$p_0(t)$と$q_0(t)$がℓに沿って方程式F，成帯条件および非特性条件を満たすことが成り立っていれば十分である．

この議論を次の簡単な例題で説明しよう．

$$\begin{cases} u_x u_y=1, \\ \ell\colon x_0(t)=2t, \quad y_0(t)=2t, \quad u_0(t)=5t. \end{cases}$$

$p=u_x, q=u_y$とおき，$F=pq-1$から，$F_p=q, F_q=p$, $F_u=F_x=F_y=0$. 初期条件$p_0(t)$と$q_0(t)$を見出すのに，与えられた方程式と結びつけられた成帯条件

$$\begin{cases} s=2p+2q, \\ pq=1 \end{cases}$$

を用いる．これから，二組の初期条件が求まる：(i)$p_0=2, q_0=1/2$;(ii)$p_0=1/2, q_0=2$. それぞれに対応して，二組のODE系は次に示す解をもつ．

(i)

$$\begin{aligned} x_s&=1/2 \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}s+x(0)=\tfrac{1}{2}s+2t, \\ y_s&=2 \quad\Rightarrow y=2s+y(0)=2s+2t, \\ u_s&=2 \quad\Rightarrow u=2s+u(0)=2s+5t, \\ p_s&=0 \quad\Rightarrow p=p_0=2, \\ q_s&=0 \quad\Rightarrow q=q_0=1/2. \end{aligned}$$

これらにより，$u(x, y)=2x+y/2$.

(ii)
$$x_s=2 \Rightarrow x=2s+2t,$$
$$y_s=1/2 \Rightarrow y=s/2+2t,$$
$$u_s=2 \Rightarrow u=2s+5t,$$
$$p_s=0 \Rightarrow p=1/2,$$
$$q_s=0 \Rightarrow q=2.$$

これらにより，$u(x,y)=x/2+2y$．この第二式は，方程式と初期条件の対称性によって第一式から見出すこともできる．

1階の方程式に関する一層の情報は引用された文献にみられる*)．

問題A．3

次の1階方程式を解け．

$$(a)\begin{cases} u_x u_y-2=0, \\ \ell : x_0(t)=t, \quad y_0(t)=t, \quad u_0(t)=3t, \quad 0\leqq t\leqq 1. \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} u_x u_y-u=0, \\ \ell : x_0(t), \quad y_0(t)=1, \quad u_0(t)=t, \quad 0\leqq t\leqq 1. \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} (u_x)^2+(u_y)^2=1, \\ \ell : x_0(t)=\sin t, y_0(t)=\cos t, u_0(t)=0, \ 0\leqq t\leqq 1. \end{cases}$$

A．2　自己相似解

偏微分方程式の自己相似解の理論は，完全ではないけれども，工学の設計問題に端を発する．船舶や航空機などの大形構造物を，小さな模型を用いて(例えば，水槽とか風洞で)作り上げるとき，観測結果のスケール不変であることは，大変重要である．すなわち，模型のまわりの流れを理解するとき，幾何学的に相似である実際の大きな対象物のまわりでも同じであって欲しい．

この効果を確実にするには，支配する構造物や流れの偏微分方程式に対し，次元解析が施され，それらの方程式は無次元化される．これはスケールの変数変換にな

*)　例えば次を見よ．1階方程式のさらに進んだ扱いに対して，R.Courant and D.Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, II (Wiley-Interscience, New York, 1962)(訳者注：数理物理学の方法III(斎藤利弥監訳)，東京図書)．入門的な立場からは，P.Garabedian, *Partial Differential Equations* (Wiley, New York, 1964)．興味ある内容で簡潔な扱いについては，R.Courant and K.O.Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Wiley-Intersciences, New York, 1948).

る．これらの方法は古くまでさかのぼれて*)，その適用は，管内の流れ，摩擦のあるトルク，空力揚力，衝撃波減衰，尖管濃縮，原子爆弾の爆発，境界層理論，乱流，渦理論，超音速流，燃焼理論，多孔質媒質の方程式その他におよぶ．これらの応用すべてを分類することは不可能であるが，それ程重要でない多くの理論に比べて，その理論は余り広く知られていない．

ここでは，わずかの見通しを示すに止める．理論を発散させないために，極めて有用な幾つかの初等的な立場を重視しよう．特に本節では，正しい変数変換によって，二個の独立変数(例えばxとt)の2階偏微分方程式が，一独立変数ηの常微分方程式に帰着されるという考え方を強調する．ここで，ηはxとtの適切な結合となっていて，そこではその常微分方程式の解から，もとの偏微分方程式のある特別な解が得られる．更に，その適切に選ばれた結合変数ηはしばしば，偏微分方程式の特性解を用いて考えられるべきであると主張しよう．

この立場を印象づけ，そして前にも用いたことのある例題は，節1.1，1.9.2，2.5で研究した波動方程式の初期値問題である．すなわち，

$$\begin{cases} \text{すべての}x\text{と}t\text{に対して，} u_{tt}-u_{xx}=0, \\ t=0\text{に対して，} u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=0. \end{cases}$$

この方程式を他の標準形$u_{\zeta\eta}=0$に変形するとき，１次の変数変換

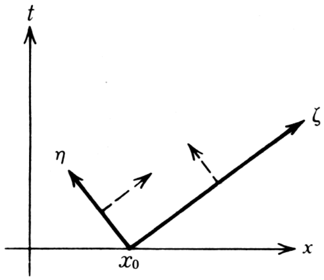
$$\begin{cases} \zeta=x+t \\ \eta=x-t \end{cases}$$

が用いられた．この新しい変数ηは適切に選ばれたものだろうか？η方向に沿って，すなわち，ηを一定，例えば図A.4に示すように

$$\eta=x-t=x_0$$

にとると，d'Alembertの解

$$u(\zeta,\eta)=\frac{1}{2}[f(\eta)+f(\zeta)]$$



図A.4

*)　ある人いわく，Galileiまで．H.Helmholtzは*Monatsber. der preuss. Akademic der Wiss. zu Berlin* (1873)において，流体動力学の方程式に対する組織的な相似律の理論を展開した．

は，方程式$u_{\xi\eta}=0$を（直交する）方向ξの常微分方程式として見出される．$\eta=$一定は特性曲線で，それに沿って初期データが伝わることに注意しよう．すべてのデータが点x_0に集中しているとき，曲線$x-t=x_0$に沿って，解は一定である．さらに，ηとξの役割を交換すると，$\xi=$一定のη方向における第二の常微分方程式を得る．この例に対しては，これら二つの常微分方程式の特殊解を結合させて，偏微分方程式の完全解が得られた．

もう一つ別の“正しい”変数変換は偏微分方程式を不変に保つものから見出される．独立変数のいかなる変換$\xi=\xi(x,y)$，$\eta=\eta(x,y)$のもとで，波動方程式は不変になるか？すなわち，

$$u_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta)-u_{\eta\eta}(\zeta,\eta)=0\ ?$$

明らかに上の変数の１次変換は，方程式を完全微分形に変形することで有用であったが，方程式の形式を不変に保たせようとは企てなかった．けれども，変数の同次スケール変換

$$\zeta=\alpha t,\quad \eta=\alpha t$$

がとれる．更に，これらは（１-パラメータ）変換群*)を形成する．部分反転

$$x\longrightarrow x,\quad x\longrightarrow -x$$
$$t\longrightarrow -t,\quad t\longrightarrow t$$

によっても，方程式は不変に保たれる．同次スケール変換により“速度座標”

$$r=\frac{\zeta}{\eta}=\frac{x}{t}$$

が暗示され，相平面の推論（例えば節1.9.8や節1.9.9の問題８参照）から，“特異性座標”

$$s=\log t$$

が暗示される．これらを用いて波動方程式は次の様に変換される．

$$((1-r^2)u_{rr}-2ru_r)-(u_{ss}-u_s)+2ru_{rs}=0.$$

これから，rのみの関数$u(r)$が解であるためには，それが常微分方程式

$$(1-r^2)u_{rr}-2ru_r=0$$

*） 群は閉性，結合則，単位元，逆元の公理を満たさなければならない．変数変換に対する群の構造全体を議論することはしない．また，いったん問題を解いたあとで，もとの変数へもどすためには，逆変換が必要である．

を満たすときであり，同様にして関数$u(s)$が解であるためには，それが次の常微分方程式を満たすときである．

$$u_{ss}-u_s=0.$$

問題A．4

(a) 波動方程式を不変に保つ次の非特異線形変換のすべてを定めよ．

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}$$

(b) 上の“速度”，“特異性”の変数変換から導かれる二つの常微分方程式を解け．

(c) 一様なスケール変換が変換群であることを証明せよ．相似解*)は

$$u=u(x,t,\eta,g(\eta))$$

の形式をもつ解である．ここで，$g(\eta)$はηの陽的に自明な関数であるが，先験的に未知の関数で，その存在は例えば次元解析とか変換群の考察によって示される．例えば，$g(\eta)$は相似解を見出すことのできる様な常微分方程式の解として考えられてよい．

第二の例題として，熱方程式の初期値問題を考えよう：

$$\begin{cases}\text{すべての}x,t>0\text{に対して，}\ u_t-u_{xx}=0,\\ \text{すべての}x\text{に対して，}\ u(x,0)=f(x).\end{cases}$$

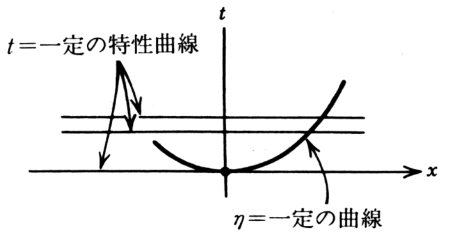
節1.7で，この方程式は物理学的原理から導かれた．物理学的単位を比べて，単独の新しい独立変数の中に，長さや時間のスケールを表す独立変数xとtを関数的に結びつける方法は見出せないことがわかる．これは次元解析の通常試みる第一段階である．すなわち解の振舞を決定する重要な物理的なパラメータを切り離してみよう．熱方程式はその様な特性的な空間や時間のパラメータをもたない．

このとき恐らく物理的でない新しい変数を採用すると，同次方程式に対する第二の次元解析の手続きとは，変換された変数として，独立変数の互いに異なるスケールから成るものをとることになる．熱方程式に対してそれは

$$\eta=\alpha\frac{x}{\sqrt{t}}\quad\text{あるいは}\ \eta=\alpha\frac{x^2}{t}$$

を試みる(図A.5参照)ことを意味している．αは例えば局所伝播速度に依存する未定係数である．この変数が次元解析的な論法によって，どのように達せられるかを調べよう．

*)　厳密な定義は文献中に見出すことは殆んど困難であり，実際一定していない．



図A.5

節1.7および線形化された熱方程式

$$cu_t - ku_{xx} = 0$$

にもどって，cの単位はcal/deg.cm^{3}であり，kのそれはcal/deg.sec.cmであった．

$$\frac{c}{k} = \frac{u_{xx}}{u_t} = \frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}$$

から，$\eta = x^2 c/tk$は無次元量であり，よって相似変数に対するよい候補となっている．

$u = u(\eta)$，$\eta = \alpha x^2/t$とおく．uが熱方程式を満たすとき，$u_t = (-\alpha x^2/t^2)u_\eta$，$u_x = (2\alpha x/t)u_\eta$，$u_{xx} = (2\alpha/t)u_\eta + (4\alpha^2 x^2/t^2)u_{\eta\eta}$．これらを熱方程式に代入し，$t$を乗ずると，次の常微分方程式を得る：

$$4\eta u_{\eta\eta} + (2+\eta)u_\eta = 0.$$

これは容易に解くことができ，解は

$$u(\eta) = \int_{\eta_0}^{\alpha x^2/t} s^{-1/2} e^{-s/4\alpha} ds.$$

次に，独立変数と従属変数の両者にまたがる一般スケール変換を試みよう．

$$\xi = \alpha x,$$
$$\eta = \beta t,$$
$$v = \gamma u.$$

これらを熱方程式に代入して

$$\frac{\beta}{\gamma} v_\eta - \frac{\alpha^2}{\gamma} v_{\eta\eta} = 0.$$

よって，等式の不変性により

$$\beta = \alpha^2, \quad \gamma \neq 0$$

でなくてはならない．この式が線形同次であるから，γの役割はなく，よって$\gamma=1$とおいてよく，$u=v$．次に，形式的に

$$u(x,y)=u(\xi,\eta)=u(\alpha x,\alpha^2 t)$$

をスケール・パラメータαについて微分して，

$$0=xu_\xi(\xi,\eta)+2\alpha tu_\eta(\xi,\eta).$$

これから*)，次が得られる：

$$\alpha\frac{dt}{dx}=\frac{d(\alpha^2 t)}{d(\alpha x)}=-\frac{u_\xi(\xi,\eta)}{u_\eta(\xi,\eta)}=\frac{2\alpha t}{x}.$$

これは変数分離形1階方程式で，解$t=cx^2$をもつ．ここでcは任意定数である．結局,スケールの変数変換は次元解析から見出されたと同じ相似変換$\eta=x^2/t$に帰着される．

問題A．5

(a)　相似独立変数$\eta=\alpha x^2/t$でかかれた常微分方程式を解け．このとき，結果として得られる解$u(\eta)=u(x,t)$がxとtで表された熱方程式を満たすことを確かめよ．

(b)　sを$\eta=\alpha x^2/t$に対する見かけの積分変数とするとき，被積分関数の指数関数は,節1.3の問題2で与えた解のGreen関数表現におけるPoisson核と似ている．この関数をより精密にせよ．

(c)　非線形拡散方程式を節2.9.8の終わりで取扱った．多孔質媒質の方程式

$$u_t=(u^m)_{xx},\quad 0<x<\infty, t>0$$

が相似変数$\eta=x(t+1)^{-1/2}$をもち,それに対する$u(x,t)=g(\eta)$の形の解が次の常微分方程式を満たさなければならないことを示せ．

$$(g^m)''+\frac{1}{2}\eta g'=0.$$

$m=1$の場合(熱方程式)に,この解がどの様にして上の(b)で参照したものになるかを示せ．

非線形微分方程式のあらゆる“対称性”を決定するのに(Lie)群を用いた理論的な発展が，最近，盛り上がりを見せている．その理論は次節で概観される．しかし，相似解を見出すために次元解析から行なうスケーリングの理論の重要性を疎そかにしてはいけない.その様な解が時には最も重要な(例えば幾何学的にスケール不変の)物理学的な解を取り上げるばかりでなく，重要な単純化された微分方程式へと導く

*)　微積分学から，陰関数の微分法公式　$y'(x)=-F_x/F_y$を思い出せ．

ことができる．

本節を閉じる前に，二つの重要な例を挙げよう．一つはNavier-Stokes方程式に対するPrandtl*)の境界層近似を導くことであり，他は原子爆弾の爆発を相似解により解析することである†)．

非圧縮性粘性流れに対する2次元Navier-Stokes方程式(節1.7.2参照)は運動量方程式

$$\begin{cases} uu_x+vu_y=-p_x+\nu(u_{xx}+u_{yy}), \\ uv_x+vv_y=-p_y+\nu(v_{xx}+v_{yy}) \end{cases}$$

であって，同時に連続の方程式

$$u_x+v_y=0$$

を満たす．速度U_∞の寄せて来る流れのスケーリングの範囲(図A.6参照)を，$\delta \ll L$と仮定した薄い層Lに選ぶ．スケーリングの議論は，通常，含まれる量の大きさが，微分演算によって変らないと仮定する．この事は原因となるかも知れない振動を制限する‡)．このときスケーリングで進めると，

$$\begin{cases} \Delta u\sim U_\infty, \quad x\sim L, \\ \Delta v\sim\ ?\ , \quad y\sim\delta \end{cases}$$

となり，連続の方程式から，

$$\frac{U_\infty}{L}\sim\frac{v}{\delta}$$

を得，よって，$v, \Delta v \ll U_\infty$. 運動量方程式の第一式は

$$\frac{U_\infty{}^2}{L}+\frac{vL_\infty}{\delta}\sim(\ ?\ )_x+\nu\left(\frac{U_\infty}{L^2}+\frac{U_\infty}{\delta^2}\right)$$

になり，これからより小さな項$\nu U_\infty/L^2$が省略される．第二運動量方程式は

*)　L. Prandtl, Verhandlg, 3rd Math, Congress, Heidelberg, 1904.

†)　G. I. Taylor "The dynamics of the conbustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives," *Proc. Roy. Soc. London* **A 200**(1950), 235-247. "The formation of a blast wave by a very intense explosion, I Theoretical discussion, II The atomic explosion of 1945," *Proc. Roy. Soc. London* A **201**(1950), 159-174;175-186.研究はその8年前に行われた．Sedovは同じ頃独立に相似解を見出している：L. I. Sedov, "Propagation of strong blast waves," *Prikl. Mat. Mekh.* **10** (1946), 241-250.また，米国のJohn Von Neumannも行ったらしい．

‡)　同様な制限は，拡張の意味がかなり曖昧となるけれども，次節の群の方法に組み入れられる．

$$\frac{vU_\infty}{L}+\frac{v^2}{\delta}\sim(\,?\,)_x+\nu\left(\frac{v}{L^2}+\frac{v}{\delta^2}\right)$$

を与え，より小さな項vU_∞/Lと$\nu v/L^2$が省略される．次に物理学的な原理として，次の圧力と摩擦力の釣合い方程式を仮定する．

$$p_x\sim\mu\frac{U_\infty}{\delta^2},\ p_y\sim\mu\frac{v}{\delta^2}.$$

全圧力の微分式にこれらを代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx}&=p_x+p_y\frac{dy}{dx}\\&\sim\frac{\mu U_\infty}{\delta^2}+\frac{\mu v}{\delta^2}\left(\frac{\delta}{L}\right).\end{aligned}$$

これから，より小さな項$\mu v/\delta L$が省略される．

さて，以上の近似

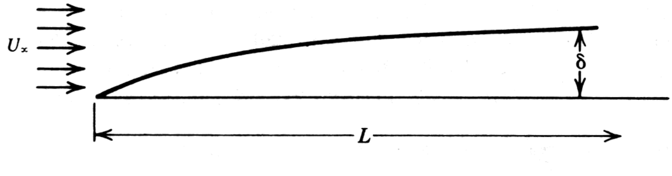
$$\frac{U_\infty{}^2}{L}+\frac{vU_\infty}{\delta}\sim\mu\frac{U_\infty}{\delta^2}+\nu\frac{U_\infty}{\delta^2},\ \frac{v^2}{\delta}\sim O+\frac{\nu v}{\delta^2}$$

を運動量方程式に加えて，次のPrandtl方程式を得る．

$$\begin{cases}uu_x+vu_y=-p_x+\nu u_{yy},\\u_x+v_y=0.\end{cases}$$

これらの方程式の重要性はよく知られており，広く文献がある．変数変換によって，これらは先の問題A.5で与えた様な多孔質媒質の方程式に転換されることになる．次の問題A.6を見よ．Prandtl方程式の数学的性質の多くは，多孔質媒質の方程式から研究される*⁾．

最後に，原子爆弾の爆発で放出されたエネルギーの量が，爆発の際の連続写真の相似解析から，どの様にして推測できるかという興味ある研究に触れる．爆発が球対称で(図A.7)，時刻tにおける波面の位置を$r=r(E,t,p_0,\rho_0,\eta)$とする．ここで，Eは爆発の初期エネルギー，p_0とρ_0はそれぞれ爆発以前の圧力と密度，ηは爆発の前



図A.6

*⁾ O.Oleinik, "On the equations of a boundary layer", *Seminari* 1962/63 *Anal. Alg. Geom. e. Topol.*, **1**, 372-387, Ist. Naz. Alta. Mat., Ediz. Cremonese, Rome, 1965.

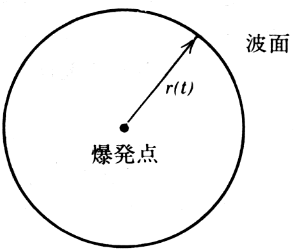
後の比熱の比である．ηを新しい相似独立変数として，またEとrを基本パラメータと基礎従属変数として取扱うと，次元解析から

$$\frac{\rho_0 r^5}{Et^2}=g\left(\eta,\frac{p_0 r^3}{E}\right)$$

となる関係が導かれる．ここでgはなお未知関数である．よって，波面の位置は次式で与えられる．

$$r(t)=\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5}t^{2/5}g\left(\eta,\frac{p_0 r^3}{E}\right).$$

これは，気体動力学の衝撃波がその背後に十分な高圧部をもつとの物理学的な仮定$p \gg p_0$によって単純化される．p_0を省略すると，関数$g=g(\eta)$は今や相似変数ηにのみ依存する．すると，基礎的な気体動力学によって，比熱依存の陽的な関係$g(\eta)$と波面の位置$r(t)$がわかる．逆に，二回以上の波面位置の写真撮影から，初期的に放出されたエネルギーEがわかる．



図A.7

問題A．6

(a)　境界層の厚さδが$1/\sqrt{Re}$に比例することを示せ．ここで，ReはReynolds数で，

$$Re=\frac{U_\infty L}{\nu}.$$

(b)　Prandtl方程式を

$$\begin{cases} uu_x+Vu_Y=-p_x+u_{YY}, \\ u_x+V_Y=0 \end{cases}$$

とかこう．ここで，$V=Re^{1/2}v$，$Y=Re^{1/2}y$．von Misesの流れ関数変換

$$u=\psi_Y,\ v=-\psi_x$$

を用いて，多孔質媒質の方程式

$$u(uu_\psi)_\psi=uu_x+p_x$$

を導け．

(*c*)　Prandtl方程式は壁面近くの流体を述べる二層構造を設定するものとして記述される:すなわち，壁の極く近くでは境界層方程式で，その狭い範囲の外部では完全なNavier-Stokes方程式である．これはいわゆる三層構造模型*)やなおそれ以上の“階層模型”へと発展させられている．これらの理論は多くの興味ある数学上の疑問や物理学的問題を含んでいる．それらについて研究せよ．

A．3　局所変換群

あるクラスの変数変換による偏微分方程式の変換は，本書の初めの部分，特に節1.1や問題1.9.1の線形2階方程式を楕円型，放物型，双曲型の標準形に変形して分類した手続きに対して，明らかに当を得ていた．非線形方程式に対しても，分類は形式的に可能であるが，(係数が従属変数に依存する)標準形への独立変数の適当な変換は余り適切といえない．よって，許される変換のクラスに，従属変数uを含ませることは無意味なことでない．

付録A.2における自己相似解や偏微分方程式の他の保存量の現われることは，独立変数の基礎空間の変換に関して，また独立変数と従属変数両者を含む変換に関してさえも，方程式の不変的性質に関係のあることを知らせてくれる．後者に関する部分は古くLie†)によって試みられた解決法であった．彼は主として常微分方程式に対する研究を行ったが，偏微分方程式への幾つかの応用を含んでいた．節1.9.9問題5で言及されたLegendre変換はその例である．そこで示された様に，その変換によって新しい変数を導入して，与えられた非線形偏微分方程式を“線形化する”ことが許された．線形問題はより扱い易いので，これらの方法は最近非常に新たな興味をもたらし，物性物理学，制御工学，遷音速流，その他で用いられている‡)．

*)　K.Stewartson, “On the asymptotic theory of separated and unseparated fluid motions,” *SIAM J. Appl. Math.*, **28** (1975),501-518.

†)　S.Lie, Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenshaften zu Christiona(スウェーデンからの独立以前のノルウェーのオスロ)(1874).

‡)　線形偏微分方程式の解析のため，群論は今や数理物理学や理論物理学で驚く程に用いられている．無限小変換群の利用および非線形の常微分方程式や偏微分方程式の解析に対する有限変換群のそれらの関係が，最近復活して，数多くのすぐれた数学的文献が現われた．例えば，次の著書およびそこに引用された文献を見よ．G.W.Bluman and I.D.Cole, *Similarity Methods for Differential Equations* (Springer, New York, 1974); L.V.Ovsianikov, *Group Analysis of Differential Equations* (Academic Press, New York, 1982).

また先の付録A.1で，一般の1階偏微分方程式の解軌道の幾何学的な描像を可能とする有用な，本質的でさえある道具として，新しい変数，例えば$p=\partial u/\partial x, q=\partial u/\partial y$の導入を見た．節1.9.4で，新しい変数を各偏導関数に指定することによって，いかにして解析的な偏微分方程式の初期値問題が1階の準線形偏微分方程式へ変換され得るかを見た．そして，後者に対してCauchy-Kowalewskiの定理により，(局所的な)解が保証された．

初等常微分方程式における完全微分方程式を復習しよう．

$$Mdx+Ndy=0,\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

が与えられたとき，この表現は全微分

$$d\phi=Mdx+Ndy=0$$

と同値であり，微分方程式

$$M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0$$

は容易に解かれる．初めに，$M=\partial\phi/\partial x$と$N=\partial\phi/\partial y$のいずれかを積分し，積分定数をそれぞれ$y$か$x$のみの関数とみなし，他方の関係式に代入してその形を決めれば，$\phi(x,y)$が求まる．

例えば，微分方程式

$$x+yy'(x)=0$$

は$M_y=N_x=0$を満たし，よって解は

$$\phi(x,y)=\int^x M=\frac{x^2}{2}+c(y).$$

これをNの式に代入して

$$\phi_y=c'(y)=y.$$

よって，解は

$$\phi(x,y)\equiv x^2+y^2=c.$$

ここで，cは任意の積分定数である．

どんな変数変換のもとで，この解軌道$x^2+y^2=c$は不変に保たれるか？解軌道が円であるから，xとyの座標を任意の角だけ回転させても明らかに影響を受けない．節1.1.1の分類手続きの所で，方程式とそれゆえ解の形を変えたいと望んだことを思い出すが，ここでは解の形を全く変えないことに興味がある．そうあるべきときには，

意図した変数変換$\zeta=\zeta(x,y)$，$\eta=\eta(x,y)$の非常に小さな部分ですら，解は不変でなければならない．従って，非常に小さな変動に注意が限定される．すなわち

$$\tilde{x}=x+\varepsilon X(x,y)+O(\varepsilon^2),$$
$$\tilde{y}=y+\varepsilon Y(x,y)+O(\varepsilon^2).$$

そうすることは，意図した変換が解析的ということになる．$O(\varepsilon^2)$のすべての項を省略すると，非常に小さな

$$\Delta x=\tilde{x}-x=\varepsilon X,$$
$$\Delta y=\tilde{y}-y=\varepsilon Y$$

に対して，それが線形近似される．

すると，解軌道$x^2+y^2=c$におけるxとyに対して，

$$(\tilde{x}-\varepsilon X)^2+(\tilde{y}-\varepsilon Y)^2=c.$$

これに不変性$x^2+y^2=c$をもたせると，

$$-2\varepsilon(X\tilde{x}+Y\tilde{y})=0$$

が得られる．非常に小さな増分$\varepsilon X=\Delta x$，$\varepsilon Y=\Delta y$はそれらの微分dx，dyによって近似され，それから

$$xdx+ydy=0$$

を得る．これは出発点とした微分方程式である．変換の仮定された解析性から，$X(x,y)=-y$および$Y(x,y)=x$であり，意図した変換は単なる回転である．

一般に，この処理方法では直ちに，上の特性方程式がかき下ろされる．

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{du}{U}.$$

ここで，従属変数の変換も許される．XとYがuに依存しないとき，特性方程式の初めの等式の解曲線$\phi(x,y)=c$は（与えられた微分方程式の）**不変曲線**と呼ばれる．$\eta\equiv\phi$は**相似変数**と呼ばれて，新しい独立変数とみなされる．この例で，$\phi\equiv\eta=r^2$は丁度2乗された動径である．極座標で見れば，特性方程式

$$\frac{\cos\theta dr-\sin\theta d\theta}{-r\sin\theta}=\frac{\sin\theta dr+\cos\theta d\theta}{r\cos\theta}$$

は$2rdr=0$となる．よって極-相似変数によって，2変数xとyの微分方程式は1変数の方程式$\eta'=0$に帰着された．

問題A.7

(a)　本文で展開$\tilde{x}=x+\varepsilon X+O(\varepsilon^2)$,$\tilde{y}=y+\varepsilon Y+O(\varepsilon^2)$が特性方程式$dx/X=dy/Y$になると主張された．もっと一般に，展開

$$\begin{cases}\tilde{x}=x+\varepsilon X(x,y,u)+O(\varepsilon^2),\\ \tilde{y}=y+\varepsilon Y(x,y,u)+O(\varepsilon^2),\\ \tilde{u}=u+\varepsilon U(x,y,u)+O(\varepsilon^2)\end{cases}$$

が次の特性方程式に導くことを示せ．

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{du}{U}.$$

(b)　次の概念について思いめぐらし，関係づけよ．

(i)　発散定理．節1.6.1参照．曲面$u(x,y)$に対する接平面は

$$u-u_0=(x-x_0)u_x+(y-y_0)u_y$$

で与えられる．

(ii)　特性曲線．節1.9.2参照．$u=u(x,y)$がuを一定にさせる様な独立変数間の陰関数としての関係$y=y(x)$を含むようにするとき，陰関数の微分法によって

$$0=du=dxu_x+dyu_y.$$

(iii)　Legendre変換．問題1.9.9(4)参照．偏微分方程式の解曲面をその接平面の包絡面としてみるとき，Legendre変換は(古くは拡張された(extended)，新しくは延長された(prolonged))次の形式をもつことに注意．

$$u(x,y)+\omega(u_x,u_y)=xu_x+yu_y.$$

(iv)　1階偏微分方程式．付録A.1参照．方程式

$$c(x,y,u)=a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y$$

の解は次のODE系をs方向に積分して得られる．

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=a(x,y,u),\\[2mm] \dfrac{dy}{ds}=b(x,y,u),\\[2mm] \dfrac{du}{ds}=c(x,y,u).\end{cases}$$

(v)　Cauchy-Kowalewskiの定理．付録A.1および問題1.9.4参照．1階方程式

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

の解は次のODE系から得られる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=F_{u_x}, \\ \dfrac{dy}{ds}=F_{u_y}, \\ \dfrac{du}{ds}=F_{u_x}u_x+F_{u_y}u_y, \\ \dfrac{du_x}{ds}=-F_x-u_xF_u, \\ \dfrac{du_y}{ds}=-F_y-u_yF_u. \end{cases}$$

(vi)　群不変性．付録A.3参照．無限小変数変換

$$\begin{cases} \Delta x=\tilde{x}-x=\varepsilon X(x,y,u), \\ \Delta y=\tilde{y}-y=\varepsilon Y(x,y,u), \\ \Delta u=\tilde{u}-u=\varepsilon U(x,y,u) \end{cases}$$

は方程式の不変性に加えて，**不変曲面条件**

$$U(x,y,u)=Xu_x+Yu_y$$

を要求し，これは特性方程式

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{du}{U}$$

によって解かれる．

(c)　常に相似性変数が得られるように，初めの特性方程式の簡単な場合

$$\frac{dx}{X(x)}=\frac{dy}{Y(y)}$$

をどの様にして解くか？

局所変換群のこの方法を用いた重要な例題として，遷音速流れの方程式

$$u_{xx}-u_yu_{yy}=0$$

を考えよう．これは翼を過ぎる流れに対する一種の“全ポテンシャル”近似である．ここで，u_xは仮定された遠距離場の定常的速度に関係した速度$(v-v_\infty)/v_\infty$であり，気体動力学のある定数で正規化されている．

上例と同様，次の変換を考えよう．

$$\begin{cases} \tilde{x}=x+\varepsilon X(x,y,u)+O(\varepsilon^2), \\ \tilde{y}=y+\varepsilon Y(x,y,u)+O(\varepsilon^2), \\ \tilde{u}=u+\varepsilon U(x,y,u)+O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

この無限小変換のもとで等式不変の方法は次の三つのステップを踏む.

1．連鎖規則を用いて，方程式を$\tilde{x}$，$\tilde{y}$，$\tilde{u}$変数でかきかえる.
2．もとの関係式$u_y u_{yy}=u_{xx}$を用い，すべての$O(\varepsilon^2)$項を省略して，ℓの表現を簡単にする.
3．残りの従属変数の係数を0に等置して，係数X，Y，Uに対する決定方程式を求める.

この方程式に対して手短かに述べると，大変驚異的な連鎖規則によって，消えなければならないεの係数として，

$$U_{xx}+(2U_{xu}-X_{xx})\theta_x+(U_{uu}-2X_{xu})\theta_x^2-X_{uu}\theta_x^3+X_y\theta_x\theta_{yy}-X_u\theta_x\theta_y\theta_{yy}+ \\ (Y_{xx}-U_{yy})\theta_y+(Y_{yy}-2U_{yu})\theta_y^2+(2Y_{yu}-U_{uu})\theta_y^3+Y_{uu}\theta_y^4+(3Y_y-U_u-2X_x)\theta_y\theta_{yy} \\ +2X_y\theta_y\theta_{xy}-2Y_x\theta_{xy}-2Y_u\theta_x\theta_{xy}+3Y_u\theta_y^2\theta_{yy}+2X_u\theta_{xy}\theta_y^2+U_y\theta_{yy}$$

になる．すべての$O(\varepsilon^2)$項は省略され，θは求める解である．従属変数のすべての係数を0に等置して，次の連立方程式を得る（あるものは冗長である）．ここで，付録A.1と同じ様式でそれらの関係が指示された.

$$\left.\begin{aligned} X_y&=0 \\ -X_u&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow X=X(x),$$

$$\left.\begin{aligned} -2Y_x&=0 \\ -2Y_u&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow Y=Y(y),$$

$$\left.\begin{aligned} U_y&=0 \\ Y_{yy}-2U_{yu}&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow Y=\alpha y+\beta,$$

$$\left.\begin{aligned} U_{xx}&=0 \\ 2Y_{yu}-U_{uu}&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow U=\tau xu+\lambda u+\gamma x+\sigma,$$

$$\Rightarrow X=\frac{-\tau}{4}x^2+\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)x+\kappa$$

$$\left.\begin{aligned} 3Y_y-U_u-2X_x&=0 \\ 2U_{xu}-X_{xx}&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \tau=0.$$

よって

$$\begin{cases} X=\left(\dfrac{3\alpha}{2}-\dfrac{\lambda}{2}\right)x+\kappa, \\ Y=\alpha y+\beta, \\ U=\lambda u+\gamma x+\sigma.^{*)} \end{cases}$$

*）遷音速流れの方程式に対するこの重要な**不変群**は次で初めて求められた:G.A.Nariboli, "Self-similar solutions of some nonlinear equations," *Appl.Sci.Res.*,**22** (1970), 449-461.

α，β，θ，κ，λ，σはすべて任意定数であるから，方程式の形を不変に保つ特定の変数変換を選ぶときに入る広い範囲の自由度がある．

もっと一般的な目標はPDEをODEに帰着させて，少なくとも一つの解をそれから抽出できる様にすることであるので，$\alpha=\lambda=1$とし，他の定数をすべて0にする．結局，特性方程式に帰着される．

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}.$$

初めの等式$dx/x=dy/y=ds$を積分すると，

$$\ln x-\ln x_0=\ln y-\ln y_0=s.$$

よって，

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=e^s.$$

二番目の等式$dy/y=du/u=ds$から，

$$\frac{y}{y_0}=\frac{u}{u_0}=e^s.$$

よって，$\alpha=\lambda=1$で他を0においたことは伸長的な変換群を与え，

$$\begin{cases} x=x_0e^s, \\ y=y_0e^s, \\ u=u_0e^s. \end{cases}$$

上の二つの積分のどちらにも，任意の積分定数が含まれる．新しい相似独立変数ηとして，初めの等式

$$\ln x=\ln y+\ln c$$

の任意積分定数を選ぶこともでき，よって$\eta=c=x/y$．このとき，第二式の積分定数はηに依存して，新しい従属変数になる．よって

$$\ln y=\ln u+g(\eta).$$

これから，

$$u=e^{-g(\eta)}y=\frac{e^{-g(\eta)}}{\eta}x.$$

第二の積分演算に対して，方程式$dx/x=du/u$を用いても，同様に

$$u=f(\eta)x$$

を得るだろう．ここで，fは（本質的に）ηの任意関数である．

$u=f(\eta)x$が今，相似変数の変換を用いて，分離変数形式になっていることに注目しよう．これは，変数分離法でいつもとっている解の特殊な選び方である．これから，fの満たす常微分方程式が見出される．$u=f(\eta)x$（ただし$\eta=x/y$）を遷音速流れの方程式に代入すると，

$$\eta^5 f''f'+2\eta^4(f')^2+\eta f''+2f'=0$$

が得られる．ここで，プライム（$'$）はηに関する微分を示す．f'をhとかき，$h=a\eta^b$の形の解を試みると，$a=-1$と$b=-4$とする解が求まり，それから解として次を得る．

$$u=x(\eta^{-3}/3+c_1)=y^3/3x^2+c_1x.$$

よって，局所変換群のもとでの不変性を規定することは，変数分離によって非線形偏微分方程式の解を見出すことになる．

問題 A．8

(*a*)　連鎖規則の計算と項の整理とを行って，上のεの係数を求めよ．

(*b*)　上に見出された常微分方程式の他の可能な解を研究せよ．

(*c*)　パラメータα，β，γ，κ，λ，σを他に選んで，対応する特性方程式を解き，表された局所変換群およびその結果としての相似変数，常微分方程式，合成特殊分離変数の解を見出せ．

この付録における三つの最後の話題として，延長，一般化された対称性，保存則に注目したい．

遷音速流れの方程式の不変群に対する6個のパラメータα，β，γ，κ，λ，σの様な任意の群定数α_iはいずれも，無限小作用素V_iと関係づけられる．このV_iは時に，**対称変換，対称性生成子**，またもう少し丁寧に不変群の**群生成子***)と呼ばれ，いずれも次式から陽的に与えられる．

$$V=X\frac{\partial}{\partial x}+Y\frac{\partial}{\partial y}+U\frac{\partial}{\partial u}$$

ただし，$\alpha_i=1$かつ$\alpha_j(j\neq i)=0$.

不変群が未だ知られていない場合に群生成子V_iを探すとき，$X(x,y,u)$，$Y(x,y,u)$，$U(x,y,u)$を未知係数とする上式が試みられる．これらの係数がuに依存すると

*)　不変群は方程式の解をその方程式の他の解へ変換する独立変数と従属変数に作用する最大の局所変換群として定義される．本書の観点から，それらは方程式の形を変えない様にする変数変換であるだろう．局所無限小を用いて群を見出すことは，方程式を不変に保つ他の“十分に隔った”変数変換（例えば，鏡映）があるかもしれないことを意味する．また勿論のこと，方程式を変えて，それを簡単にする他の変数変換もある．

したことによって，独立変数xとyばかりでなく，従属変数uの変数変換を面倒にしている．

変数ばかりでなく面積素を変換するLegendre変換(節1.9.9.4参照)，すなわち，$(x, y, u, u_x, u_y) \to (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega, \xi, \eta)$と，導関数を新しい変数とみなすCauchy-Kowalewskiの準線形化法とともに，それらと同様の方法で追加された導関数の変換$p=u_x$，$q=u_y$および選ばれた高階導関数にさえ依存する係数X，Y，Uを考えてもよい．これは，特にそれらの導関数について陽的に非線形性をもつ偏微分方程式に対して意味をもつ．いったん$p=u_x$，$q=u_y$として新しい変数が採用されると，次式を考えること(古くは拡張，新しくは延長)はまた自然である．

$$V = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + U\frac{\partial}{\partial u} + P\frac{\partial}{\partial p} + Q\frac{\partial}{\partial q}.$$

これらの拡張(一般化された対称変換)はより進んだ変数変換の研究を考慮して，微分方程式のより一層の単純化(例えば，線形化)の可能性を与える．

非常に広汎な，なお発展しつつある理論が生じている．変数分離に対して，一層増大する一般的設定の階層について，単に知識のために，次の様にそれを描いておこう．理論的なものでなく，後者の立場を強調しすぎたことを許してもらおう．そこに与えた人達の名は，何であろうといろいろな方法で正確とか，完全とかあるいは徹底的とかでなく，暗示的であると了解されたい．

Vの係数	理　論	関係した人々
$X_i(x_j$のみ$)$	相似変数	Galilei, Helmholtz
$X_i(x_j, u)$	通俗的	Galois, Lie
$X_i(x_j, u, u_{x_j}, u_{x_{jk}}, \cdots)$	接触変換	Cartan, Vessiot
$X_i(x_j, u, u_{x_j}, u_{x_{jk}}, \cdots)$	保存則	Lax, Zakharov

偏微分方程式に対する保存則についての評釈で終ることにする．よく知られている様に，多くの重要な偏微分方程式は物理学の保存則から導かれる(節1.7参照)．時には，それらの保存則は変分原理に関係する．変分的極値のEuler方程式(節1.9.5(3)参照)の形をもつ偏微分方程式に対して，しばしば**一般Noether*)の定理**と呼ばれる重要な結果がある．その結果の下では，上で見出された一般化対称変換V_iは一般化保存則と1対1対応にあることがみられる†)．後者は，相似変数ηが相似曲線に沿って一定である事実の一般化とみなされる．

*)　E. Noetherについては次を見よ．"Invariant Variationsprobleme," *Nachr. Ges. Göttingen* (math. phys. **K1,** 1918), 235-257.

†)　Korteweg-de Vries方程式に対する幾つかの例が節2.9.8に与えられた．

問題A.9

(a)　遷音速流れの方程式に対して，六個の群生成子V_iをかき下ろせ．その理論の代数学的局面を学習して，それらは交換子演算のもとでLie環を形成する．それを示せ．

(b)　例えば，“ただでは何も得られない”ということによって要約される様に“普遍的な保存則”を受けとると，この理論は一体何に基づいているのだろうか？

(c)　この理論を偏微分方程式の数値解析における重要なスキームと関係づけよ．

休止　第5回:例題，説明，演習

付録A.1において，かなり一般的な設定の下で単独な1階準線形偏微分方程式$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$を考えた．ここでの重要な関心は，例えば，流体および気体の動力学から生じる**双曲型保存則系**とよばれる次の方程式

$$u_t+(f(u))_x=0$$

にある．しかし，この系の理論を述べる前に単独な方程式に対する解の振舞いについて直観的なイメージを得ておくこともためになろう．

例題

保存則$u_t+(f(u))_x=0$は，流束関数fを可微分と仮定すると，準線形$u_t+f_u u_x=0$とかかれる．ここで，次の三つの特殊な単独方程式を考えたい．

$u_t+cu_x=0$	**並進**（translation）**方程式**
$u_t+uu_x=0$	**対流**（convection）**方程式**
$u_t+c(u)u_x=0$	**移流**（advection）**方程式**

これらの呼称を選んだ理由については，演習問題2を参照せよ．

これら方程式のそれぞれに対して，次の初期値問題

$$\begin{cases} u_t+cu_x=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

に対する解の振舞いを定性的に考えよ．

解答　この理論の鍵は微分法の連鎖規則であって，特にuのtに関する全微分

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

にある．その上で$dx/dt=c$とおいてよいx-t平面内の曲線$x(t)$を見出すことができれば，（保存則の特性解とよばれる）これらの曲線上で次が成り立つ．

$$0=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}=u_t+cu_x=(u_t,u_x)\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix}.$$

このことは次の様に説明できる．

まず，cを正の数とする定数係数並進方程式の場合を考えよう（図5Pa参照）．初期点x_0を固定する．方程式$dx/dt=c$によって，$(x_0,0)$から放射される曲線$x(t)=ct+x_0$を得るが，この上で解$u(x,t)$の全微分dx/dtが消える．よって，この曲線上では$u(x,t)$は一定となって，この解はこの曲線に沿って初期値u_0のままである．すべての$x_0(-\infty<x_0<\infty)$に対してこれを行えば，解$u(x,t)$は速さcで右方へ移動する初期分布から成ることがわかる．よって，$u(x,t)=u_0(x-ct)$．また，特性解と解$u(x,t)$の傾きは直交関係にある．それぞれを図5Paと図5Pbに示した．

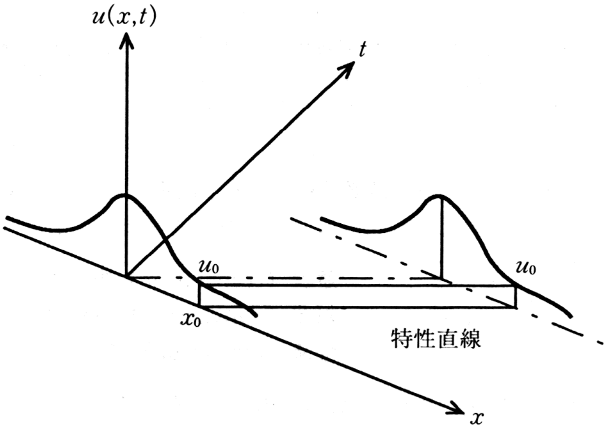


図5Pa．並進波動解

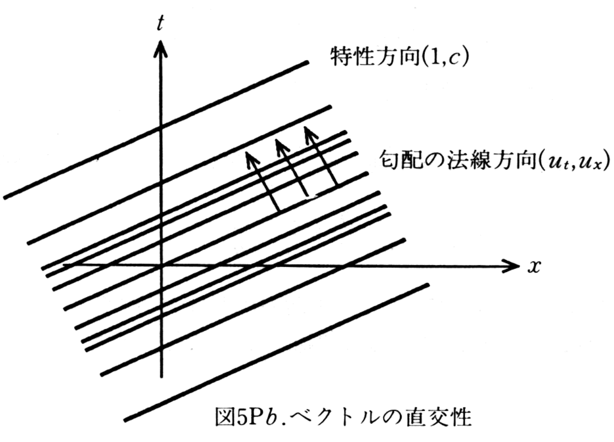


図5Pb．ベクトルの直交性

対流および移流の方程式に対しても同様に上に述べたことを示せるだろうか？対流方程式に対しては，特性曲線$x(t)$は$dx/dt=u(x,t)$を満たすように設定されている．しかし，全微分dx/dtはこの曲線上で消えるから，$u(x,t)$は定数であり，よって，それに沿ってu_0となる．このように，初期点x_0をいったん固定すると，初期値u_0が定まり，それが特性曲線に沿って伝播することになる．特性曲線上では$dx/dt=u_0$であって，特性曲線は直線$x(t)=u_0t+x_0$である．しかしながら，ここで注意すべきことは，x_0より大きいあるx_1での初期値u_1がu_0より小さいとき，衝撃による不連続性が生じることである（図5Pc参照）．

移流方程式に対しても特性直線$x(t)=c_0t+x_0$, $c_0=c(u_0)$を設定することによって同じ議論が成り立つ．ここでは$c(u_0)$が特性解を扇形に拡げたり，狭めたりする効果のあることに注意しよう．

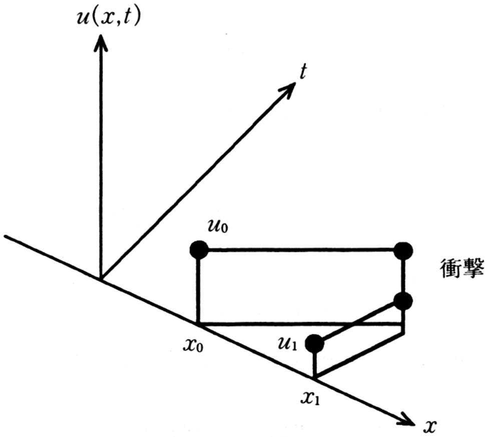


図5Pc．対流誘導衝撃

演習問題

1．並進方程式の初期値問題に対して，衝撃の初期分布を$u_0(x)=1,\ x\leqq 0; u_0(x)=0,\ x>0$とするとき，この問題の解はどのように見えるか？

2．対流方程式をまた「Burgersの方程式」または「物質方程式」とよぶこともある．何故後者の呼名を採るのか？　何故$u_t+c(u)u_x=0$を移流方程式とよぶか？　他にどんな呼称が考えられるか？

3．方程式$u_t+uu_x=0$と例えば付録A.1で議論した方程式$uu_x+u_y=1$とを比較せよ．

4．これら方程式の(弱)解の一意性に対して，跳躍，エントロピーおよび評価とは何んであるか？　移流方程式の衝撃波動力学に関する文献を調べよ．

5．付録A.2の相似解との関係をみよ．また，付録A.3の群の観点との関わりを述べよ．

さて，双曲型保存則

$$u_t+(f(u))_x=0$$

を考えたい．ここで，u，fおよびxはベクトルである．

例題

$u(x,t)$と$f(u)$をn次元ベクトルとして，1空間変数の場合を考えよう．保存則形を準線形

$$u_t+A(u)u_x=0$$

に変換して，単独の場合に述べた特性解の方法によって調べよ．

解答　鍵となるのは連鎖規則とその特性曲線上の全微分への適用である．先ず，ここでの双曲性の意味を明らかにして，その有用性を示そう．

各点$(x,t,u_1,\cdots,u_n)$で

$$Q^{-1}AQ=D\equiv\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \lambda_i\text{:行列}A\text{の実固有値}$$

である可逆行列Qが存在すれば，準線形1階偏微分方程式系はその点で**双曲型**であるといわれる．固有値λ_iがすべて異なれば，系はその点で**直双曲型**(strictly hyperbolic)とよばれる*)．系の準線形性とその双曲性はまとめて扱うことができることは興味深

*）訳者注：原著者K. Gustafson教授は，直双曲性の概念を狭義のPetrovskiiの意味の双曲性として用いている．特にこの用語は近年になって電算機の発達による双曲型偏微分方程式の数値解析において目立って用いられている由で，この用語を使ったとのことである．技術者達の用いる双曲型とは通常ここでの意味の直双曲型を指すことが多い．

い．事実，$v=Q^{-1}u$とすると，$u_t+A(u)u_x=0 \Rightarrow u_t+QDQ^{-1}u_x=0 \Rightarrow Q^{-1}u_t+DQ^{-1}u_x=0 \Rightarrow v_t+Dv_x=0$を得て，最後の変形で$Q$が点$(x,t,u)$に依存することを無視すれば，最初の系は対角化され，従って分離化した系となった．

ここで，保存則の式から準線形の式へ話をもどそう．$(f(u))_x$の最初の成分は連鎖規則によって

$$f_1(u)_x=\frac{\partial f_1(u)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial f_1(u)}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

fの他の成分も同様に連鎖規則の適用によって，結局準線形の系

$$u_t+A(u)u_x=0$$

を得る．ここで，$A(u)$はi行j列成分が$\partial f_i/\partial u_j$の$n\times n$ヤコビ行列で，$A$は双曲的，すなわちすべての点$(x,t,u_1\cdots,u_n)$で実対角化可能とする．例えば，Aが対称行列のときはこの場合に当るが，Aが非対称的である場合の応用が重要である．

$n\times n$行列が対角化可能である為の必要十分条件はAとAの転置行列A^*がn個の1次独立な固有ベクトルをもつこと，およびAとA^*の固有値λ_iは実数のとき同じ値であることを思い出して，準線形の方程式系とA^*のn個の固有ベクトルの内積をとるとn個の直交(または正規)方程式

$$0=(u_t+Au_x,v_j)=(u_t,v_j)+(u_x,A^*v_j)=(u_t,v_j)+(u_x,\lambda_j v_j)=(u_t+\lambda_j u_x,v_j)$$

すなわち，

$$0=(u_t+\lambda_j u_x,v_j)\quad(j=1,\cdots,n)$$

を得る．ここで特性方向をもち込むために，ベクトル$u_t+\lambda_j u_x$の各成分を全微分

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{\partial u_i}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}+\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}$$

として表したい．先に述べた単独の場合と同様に，

$$\frac{dx_j(t)}{dt}=\lambda_j(x,t,u_1,\cdots,u_n)$$

を満たすx-t平面内の特性曲線$x_j(t)$を見出すことができる．この様なx-t平面内の曲線$x_j(t)$が与えられたとすると，上に述べたn個の直交方程式はそれぞれがj番目の特性曲線$x_j(t)$上でのみ成り立つn個の常微分方程式系となる：

$$\begin{array}{ll}\dfrac{du_1}{dt}v_{11}(u)+\dfrac{du_2}{dt}v_{12}(u)+\cdots+\dfrac{du_n}{dt}v_{1n}(u)=0, & j=1\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{du_1}{dt}v_{n1}(u)+\dfrac{du_2}{dt}v_{n2}(u)+\cdots+\dfrac{du_n}{dt}v_{nn}(u)=0, & j=n.\end{array}$$

この様に偏微分方程式は，単独な場合と同様に系をなす場合も特性解に沿う常微分方程式系に帰着される．これらの常微分方程式系は最初の偏微分方程式系に対してしばしば**正規方程式系**または**正規形**とよばれる．これらは常微分方程式系と同様に，特性解の方程式と合せて当初の偏微分方程式系の積分を常微分方程式の手法によって(原理的に)可能にしてくれる．

演習問題

6．行列の対角化可能性について線形代数を復習せよ．

7．先に述べた三つの単独方程式に対する固有値と固有ベクトルは何んであるか？

8．ベクトル形式の保存則を積分して，この結果を説明せよ．

重要な1階双曲型保存則系は流体動力学において粘性効果を無視するとき現れる．

例題

非粘性圧縮性気体の動力学における1次元Euler方程式は双曲型保存則系であることを示し，この系の固有値$\lambda_i (i=1,2,3)$を求めよ．

解答　これらの方程式は次の様にかかれる：

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2+p \\ (e+p)u \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで，ρは気体の密度，$m=\rho u$は気体の質量，uは速度，pは圧力，$e=\rho\varepsilon+\rho u^2/2$は単位体積当りの全エネルギー，$\varepsilon$は単位質量当りの仮想的な内部エネルギーである．この系の三つの方程式はそれぞれ質量，運動量およびエネルギーの保存則を表す．更に*)，完全気体の法則$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon$が成り立つと仮定する．ここで，$\gamma>1$は比

*）これらの方程式の導出のため気体動力学に関する文献を参照せよ．しかしながら興味ある情報として，節1.7.1の議論を繰り返すと，そこでは仮想的内部エネルギー関数Uは幾分混乱させたか，または実質的な役割りを演じなかった．そこでは，考察下の物体と温度域にわたって一定値cと仮定して比熱$c(u)$に対するU_uを単純化したが，これは線形化のためであった．ここでは，内部エネルギーεを単純化して，密度と圧力の比に比例するとすれば案外うまくいくが，これは三つの未知関数に対して三つの方程式をそろえるためである．

熱比とよばれる物質依存定数で，例えば空気に対して$\gamma=1.4$である．この状態方程式が加わって，全エネルギーeと内部エネルギーεの双方をこの方程式系から消去する$(p=(\gamma-1)(e-\rho u^2/2)$に注意)ことができ，当初の未知数$\rho$，$u$および$p$に関して方程式系を表すことができる(演習問題9参照)．

密度，質量およびエネルギー変数でかかれた方程式系を状態方程式を用いてかきかえると，次の保存則系を得る．

$$\begin{bmatrix}\rho\\m\\e\end{bmatrix}_t+\begin{bmatrix}m\\(\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho\\\gamma em/\rho-(\gamma-1)m^3/2\rho^2\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

ヤコビ行列$A=[\partial f_i/\partial u_j]$は容易に計算できて，上の系は次の準線形形式で表される．

$$\begin{bmatrix}\rho\\m\\e\end{bmatrix}_t+\begin{bmatrix}0&1&0\\(\gamma-3)u^2/2&(3-\gamma)u&\gamma-1\\(\gamma-1)u^3-\gamma eu/\rho&\gamma e/\rho-3(\gamma-1)u^2/2&\gamma u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho\\m\\e\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

これから，それ程容易ではないが，Aの固有値$\lambda_1=u$，$\lambda_2=u+c$，$\lambda_3=u-c$が得られる．ここで，$c=(\gamma p/\rho)^{1/2}$は音響学的に局所音速とみなされる．γ，pおよびρはすべて正であるから，固有値は実数でかつ異なっている．よって，方程式系は直双曲的であって対角化可能である．

演習問題

9．幾分単純な気体動力学の準線形方程式系は，未知関数ρ，u，pでかくと，次の様になる．

$$\begin{bmatrix}\rho\\u\\p\end{bmatrix}_t+\begin{bmatrix}u&\rho&0\\0&u&1/\rho\\0&\gamma p&u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho\\u\\p\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

このとき，固有値，固有ベクトルを見出し，この系を先に述べた常微分方程式系に帰着させせよ．

付録B．　電算的方法

電算的方法，すなわち，電算機を用いる計算法は，近年研究の最前線に立ってきている．偏微分方程式の計算機による解法は少なくとも今世紀初頭にまで*)，また常微分方程式のそれはずっと以前†)にまで遡れるが，それらの広範囲に及ぶ展開や応用は，手計算とか機械式計算機の技術的困難によって制限された．高速，大容量，低価格(演算当りで)の電子計算機の出現はそれらすべてを変化させ，それを実行して，数学の分野ばかりでなく，一般の科学においても一層各方面にまで及び，許容される数学やその方法の役割を大きく変えた．

さて，次にあげるテーマ

　　楕円型方程式に対する電算的方法
　　放物型方程式に対する電算的方法
　　双曲型方程式に対する電算的方法

のいずれも内容が豊富であるから，ここでは，楕円型方程式に対する幾つかの基本的な最近の方法論に焦点を当てて，放物型方程式については少しばかり，双曲型方程式に対しては殆んど触れない．場所と時間の制限によって，あらゆる組織的な数値解析(例えば，誤差評価，演算回数，代数的特徴，その他)は断念せざるを得なかった．

B．1　差分法

この手法は既に節2.6や節2.9.6で導入された．偏微分方程式の数値解法すべての中心におかれ，広範囲に用いられている．差分法の理論と実行両面に対する重要な鍵はステンシル‡)の概念である．再び節2.6の問題を考えよう．すなわち，境界上の指定点でuの値が与えられたとき，図B.1に描かれた3×3の正方形の内部で，$\Delta u=0$を満たすよい近似解を数値的に求めよう．ただし，調和関数に対する平均値の定理から推論して，次の四個の未知数をもつ四元連立方程式に達する．

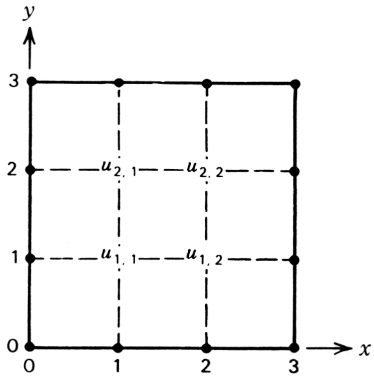
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,0}+u_{0,1} \\ u_{2,0}+u_{3,1} \\ u_{1,3}+u_{0,2} \\ u_{2,3}+u_{3,2} \end{bmatrix}.$$

*)　例えば，次の研究では2次元空間の問題に対して差分法が用いられた．C.Runge, "Über eine Methode die partielle Differentialgleichung Δu=Constant numerisch zu integrieren," *Z. Math. Phys.*, **56** (1908), 225-232; L.Richardson, "The approximate arithmetic solution by finite of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam," *Phil. Trans. Roy. Soc. London* A **210** (1910), 307-357.

†)　L.Euler, Institutiones Calculi Integralis, St. Pertersburg(1768).

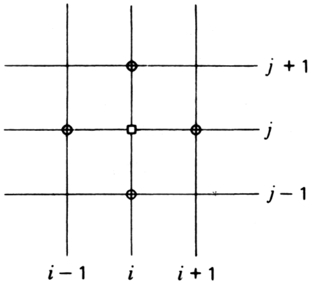
‡)　ときには，**電算モレキュール**(computational molecule)と呼ばれる．

記法は節2.6のそれと少しずらしてある．ここで$u_{i,j}$は図B.1におけるi行j列の格子点を示す．この記法はこの種の文献では共通に用いられる．また数値的スキームが計算の終末に近づいたとき，しばしば大文字Uを用いて，その離散化された解を示し，解析解に対してはuを用いて，それと区別する．



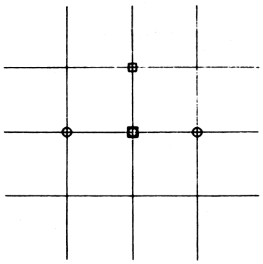
図B.1

この方法のステンシルは図B.2に示されるグラフである．これはLaplace作用素Δを離散化するための**5点ステンシル**と呼ばれる．それはどの点がスキームに用いられるかを分類して示す．平均化でより多くの点を(すなわち，より大きなスキームも)含ませることによって，uに対しより高位の近似解を得ることができるが，計算時間の増加に伴って費用は高額になる．恐らく重みを付けた5点ステンシルは，2階楕円型偏微分方程式で広く用いられる．4階の方程式に対しては，より規模の大きなステンシルが用いられる．スキームの精度は，hを格子間隔として，通常$O(h^n)$に保証される誤差を用いて与えられ，原理的に常にTaylor級数展開から決められ得る．

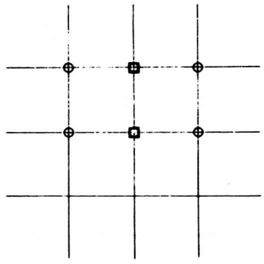


図B.2

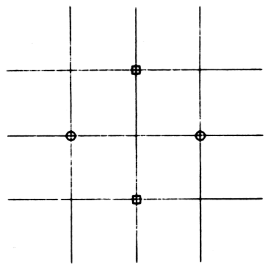
図B.3に示す様に，他に重要なステンシルが三つある．二つは放物型に，一つは双曲型に対するものである．



図B.3a



図B.3b



図B.3c

図B.3aは熱方程式の前進Euler法に対するステンシルで,これは方程式を近似するのに，前進1階時間差分と中心2階空間差分をとったものと理解できる．離散化された方程式は

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{\Delta t}=\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

であり，これから，スキームの算法は次で与えられることがわかる．

$$U_{i,j+1}=U_{i,j}+\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}[U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}].$$

このスキームは**陽的**であるといわれる．なぜなら，次の$j+1$番目の線上の解がj番目の線上のUの既知の値を用いて陽的に計算されるからである．この算法は次の様にかきかえられる．

$$U_{i,j+1}=(1-2r)U_{i,j}+r(U_{i+1,j}+U_{i-1,j}).$$

ここで，$r=(\Delta t)/(\Delta x)^2$．この比$r$は重要である．明らかに，$r=0$のとき，解は時間において前進せず，よって興味を失う．他方，比$U_{i,j+1}/U_{i,j}$が1を超えると，この算法の収束性は望みがなくなるだろう．ここで両側からの寄与を無視すると，この比は厳密に$(1-2r)^{-1}$であるから，すべての発散をも避けるためには$r<1/2$ととられるべきであろう．実際，もっと注意深い安定性の解析によって，

$$0<r\leqq 1/2$$

に対して，差分解$U_{i,j}$は，ΔtとΔxを0に近づけたときの微分方程式の解$u_{i,j}$に収束することが示される．節2.6で，首尾一貫したスキームに対し，収束性と安定性が同時に成り立つことが示された．

スキームの安定性を示す慣例的な方法は二つある．数値的安定性は通常，有界な初期誤差が有界に留まるとの意味にとられる．この事は本書で用いた概念で，最大値ノルムにおける安定性である．両方法とも，上に与えた議論で，既に暗に述べら

れている．考慮しなかった唯一つの効果は，隣接する両側項からの影響である．

Von Neumann法（これはまた**Fourier法**とか**モード解析法**とも呼ばれる）は（有限）Fourier級数における初期データの誤差を表し，連続な場合と同様変数を分離し，次にFourier成分が指数関数的に増大しないことを保証する．この様に前進型Eulerスキームに対しては，$u_{k,0}\equiv u_k(k=0,\cdots,n)$が初期誤差分布を表すとき，それはFourier和

$$U(0)=\sum_{k=0}^{n}c_k e^{ik\pi x/l}$$

によって表される．ここで，c_kは$(n+1)\times(n+1)$個の線形方程式$U(x_k)=u_k$から見出される離散Fourier係数である．いいかえると，格子点で初期誤差に厳密に一致する連続な当てはめが構成される．このとき，線形性が強力に入り込む．第一に，いずれの解にも賦与される誤差Uを考えることだけが要求される．第二に，一つを除き他は$u_k=0$とおいて，それを解き，次にその$n+1$個の構成部分のそれぞれから全体の誤差を構成する．誤差の成長あるいは非成長に関する限り，数値的なc_kの初期値は無関係である．よって，単一モード$e^{ik\pi x_k/l}=e^{ik\pi m/n}$を探すことだけが必要になる．この事は，なぜこの方法がしばしばモード解析と呼ばれるかの理由を与える．

従って，熱方程式に対する連続な変数分離法と全く同様，解の誤差を

$$U(x,t)=e^{ik\pi m/n}e^{\lambda t}$$

の形をとれると仮定して，熱偏微分方程式の前進Euler離散化の式に代入すると

$$\frac{e^{\frac{ik\pi m}{n}}e^{\lambda(t+\Delta t)}-e^{i\frac{k\pi m}{n}}e^{\lambda t}}{\Delta t}=\frac{e^{i\frac{k\pi(m+1)}{n}}e^{\lambda t}-2e^{i\frac{k\pi m}{n}}e^{\lambda t}+e^{i\frac{k\pi(m-1)}{n}}e^{\lambda t}}{(\Delta x)^2}$$

が得られ，これから

$$\begin{aligned}e^{\Delta t}-1&=r\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-2+e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\\&=r\left(2\cos\frac{k\pi}{n}-2\right)=-4r\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).\end{aligned}$$

安定性に対して，時間ステップは，$|e^{\Delta t}|=|1-4r\sin^2(k\pi/2n)|\leqq 1$が保証される程十分に小さくとられなければならない．この不等式は$0\geqq -4r\sin^2(k\pi/2n)\geqq -2$，すなわち，$r$の範囲は次の様に決定される．

$$r\leqq 1/2.$$

安定性に関するモード解析は境界条件について考慮していない．それは通常，**増幅行列法**と呼ばれる第二の方法で扱われる．Dirichlet境界条件$u(0,t)=u(l,t)=0$に対して，離散Euler近似は

$$U_{N+1}=AU_N$$

だけ，時間ステップを進める．ここで

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1-2r & r & 0 & \ddots & & \\ r & 1-2r & r & \ddots & & \\ 0 & r & \ddots & & & \\ & & & & & r \\ & & & & r & 1-2r \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ベクトル$\{U_N\}_{N=1}^{\infty}$は，Aの固有値の大きさがすべて1以下であるとすれば，有界のままである．なぜなら，$|\lambda_k|>1$なるものがあれば，対応する固有ベクトルは爆発してしまう初期誤差として用いられるからである．逆に，いずれのモードも爆発し得ないとき，それらのどんな結びつきも起こり得ない．

Aの固有値が(境界条件によって)$\lambda_0=\lambda_n=0$となり，このとき$k=1,\cdots,n-1$に対し

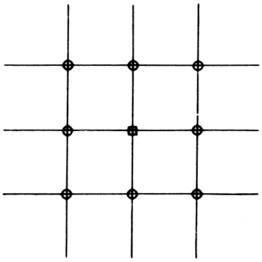
$$\lambda_k=1-4r\sin^2\frac{k\pi}{2n}.$$

これは先のVon Neumann解析で見出される同じ増幅因子であることに注意しよう．よって，$|\lambda_k|\leqq 1$を保証するには，$r\leqq 1/2$が要求される．境界条件の異なるものはAの第1行と最下行を変えればよく，よって，最大の$|\lambda_k|$やrの許される範囲が変わる．

問題B．1

(a)　Taylor級数から，前進Eulerスキームはxについて$O(h^2)$，tについて$O(k)$であることを示せ．ここで$h=\Delta x, k=\Delta t$.

(b)　ラプラシアンに対する9点ステンシルについてよい重み付けを見出せ．



(c)　次の$n\times n$三重対角行列Aの固有値が$a_0+2(a_1a_{-1})^{1/2}\cos(k\pi/n+1)$ ($k=1,\cdots,n$)であることを示せ．

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & & & \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & \\ 0 & 0 & a_{-1} & a_0 & \ddots & \\ & & & & & a_1 \\ & & & & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

よって，前進型Euler増幅行列は(最初と最後の行の0を除いて)，固有値$(1-2r)+2r\cos(k\pi/n)=1-4r\sin^2(k\pi/2n)$をもつ．

図B.3bのステンシルは熱方程式に対するCrank-Nicolsonスキーム

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{\Delta t}=\frac{[U_{i+1,j+1}-2U_{i,j+1}+U_{i-1,j+1}]+[U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}]}{2(\Delta x)^2}$$

のステンシルである．このスキームはj番目と$j+1$番目の両レベルでの空間中心差分の平均をとることに相当している．このとき，それは陰的である．すなわち，U_{j+1}は，上記の前進Eulerスキームと同様j個の値によって陽的に与えられるのではなく，間接的に解かなければならない．$r=(\Delta t)/(\Delta x)^2$とおくと，Crank-Nicolson方程式は

$$-rU_{i-1,j+1}+(2+2r)U_{i,j+1}-rU_{i+1,j+1}=rU_{i-1,j}+(2-2r)U_{i,j}+rU_{i+1,j}$$

とかかれる．ここで，左辺には三個の未知数が一群をなす．Dirichlet境界条件に対し，内部近似U_Nは次式によって進められる．

$$U_{j+1}=A^{-1}BU_j$$

$$=\begin{bmatrix} (2+2r) & -r \quad \cdots & 0\cdots \\ -r \quad \ddots & (2+2r)\cdots & \\ 0 \quad \ddots & & \\ & & \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} (2-2r) & r \quad \cdots & 0\ \cdots \\ r\ \cdots & (2-2r)\cdots & \\ 0\ \cdots & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,j} \\ \vdots \\ \\ U_{n-1,j} \end{bmatrix}.$$

$A^{-1}B$の固有値の大きさがすべて1より小さいことを示すことができ，よって，この問題に対するCrank-Nicolsonスキームは無条件に安定(すなわち，rの任意の値に対して安定)である．

ここで，手計算でできる幾つかの数値的問題をあげよう．

問題B．2

(a)　前進Eulerスキームを用いて，二点時間ステップで次の問題を進めて，$U(1/2, 1/32)$を決定せよ．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = -x(x-1), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

ここで，$h=\Delta x=1/4$，$k=\Delta t=1/64$とせよ．

(b)　Crank-Nicolsonスキームを用いて，一点時間ステップで進めよ．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

ただし，$h=\Delta x=1/4$，$k=\Delta t=1/32$.

(c)　Crank-Nicolsonスキームを用いて，一点時間ステップで進めて，解析解と比較せよ．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

ただし，$\Delta x=\pi/4$，$\Delta t=\pi^2/32$.

上記三番目のステンシル(図B.3c)は，双曲型偏微分方程式に対して有効な，いわゆる“蛙跳び”スキームのそれである．すなわち，

$$\frac{U_{i,j+1} \pm U_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{U_{i+1,j} \pm U_{i-1,j}}{\Delta x}$$

比$\Delta t/\Delta x$は特定の方程式の係数(伝播速度)に調整されなければならず，符号±は方程式が2階か1階かに従って選ばれる．これらの方法*)は付録Aで扱われた特性曲線理論や保存則と関係していて，それらによって最もよく理解される．

ここで，電算機に頼る問題を幾つか挙げる．

問題B.3

(a)　次の離散化を用いて，節2.1の問題1を解け．

$$\frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x}.$$

開始に当って，仮想値

$$U_{i,-1} = U_{i,1} - 2g(x_i)\Delta t$$

*）　ここではそれらを論じない．節2.9.6(Buckley-Leverette方程式)や問題2.9.8(a)(交通流方程式)で例題として簡潔に触れた．双曲型の系に対する数値的理論の特に良好な取扱いが次に見られる．H.O.Kreiss and J.Oliger, *Methods for the Approximate Solution of Time Dependent Problems*, Global Atmospheric Research Program Publications No.10 (World Meteorological Organization,1973).

を導入せよ．よって，$U_{i,1}$は次式で与えられる．

$$U_{i,1}=\frac{U_{i-1,0}+U_{i+1,0}}{2}+g(x_i)\Delta t.$$

(*b*) 問題B.2(*b*)を電算機によって解け．時間を延長させよ．
(*c*) (*b*)の解析解と数値解を比較せよ．

B.2 有限要素法

節2.6と節2.9.6で有限要素法が議論され，この主題が非常に大きくなりつつあるので，本節で簡潔にすませよう．数多くの文献が節2.6に与えられている．有限要素法の先駆的仕事は，原理的に土木工学の構造設計にあった．これは最近，流体動力学の問題に適用される様になった*)．有限要素法はかどや障害物のまわりで網目密度を増加させて処理することができ，従って，不規則な領域で偏微分方程式をモデル化するとき，大きな長所がみられる．入出力の実行は厄介である．

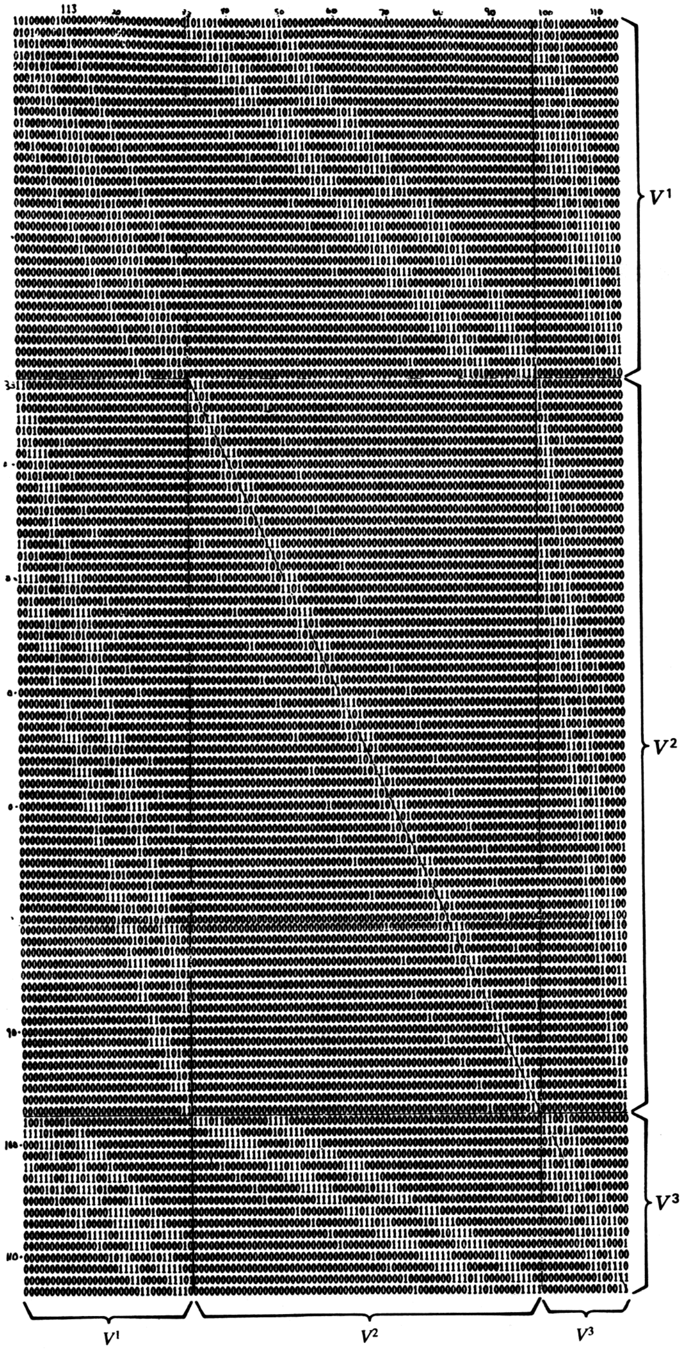
表B.1は，節2.6の問題に適用されたFourier級数法，差分法，有限要素法の比較である．Fourier級数は10項で収束し，差分法の誤差は10×10格子で約５％，有限要素法のそれは10×10節点で約10％であった．ここで後者は，よい例でない．なぜなら，たわみと回転を許すたった十二個の自由度をもった平板の線形要素コードが用いられたからである．２次要素では恐らく，ずっとよい結果を与えるだろう．図2.6*b*の境界関数は確かに平板コードのためには敏感すぎる．

表B.1

(x, y)	Fourier級数法 (10項)	差分法 10 × 10 (9 × 9)	有限要素法 10 × 10 (9 × 9)
1, 0	0.988	1.0	1.0
2, 0	1.913	2.0	1.99
1, 1	0.431	0.434	0.47
2, 1	0.517	0.535	0.55
1, 2	0.143	0.146	0.16
2, 2	0.153	0.159	0.17

不規則領域Ωを四面体要素あるいは長方形要素に三角形分割し，そこでの近似関数を互いに緩やかに結びつけるとき，結果の線形系において非常に乱雑な行列が得ら

*) よい参考書を挙げておこう．F.Thomasset, *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations* (Springer, New York, 1981); R.Peyret and T.D.Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow* (Springer, New York, 1983); A.J.Baker, *Finite Element Computational Fluid Mechanics* (McGraw Hill, New York, 1983).



図B.4　指示されたHelmholtz成分をもつ疎行列

れる．これは，正方形の場合ですら，三角形分割上スプライン関数を近似することが厄介なとき(例えば，スカラー関数でなくベクトル値関数を近似する要請によって)，起り得る．深入りは避けるが，非圧縮性の流れに対して２次有限要素にもとづく疎行列がある(図B.4)*)．有限要素を集め組み立てる過程で生ずる組み合わせ論および代数学に興味ある問題が多い†)．空力構造に関する不規則領域に対して，有限要素と差分の結合スキーム(**パネル法**)を用いるとき，興味ある組み合わせ的および解析的“Green関数”の極配置と双極配置に関して，疑問が生ずる‡)．

この様な多次元要素の結合問題を詮索するのではなく，変分的な二次近似でより深く進めることを提案したい．後者は，その定義を拡大させて，単独要素上の近似とみなされるものである．

問題B．4

(a)　$u''+u'=4$　$(0<x<1), u(0)=u(1)=0$を，近似関数$\phi(x)=x(x-1)$と節2.6のGalerkin法を用いて解け．

(b)　これを解析的に解け．　(c)　$x=0.2,\ 0.5,\ 0.8$で比較せよ．

問題B．5

(a)　節1.3と節2.9.9(９)のAiry方程式の問題，$u''+4xu=16$ $(0<x<2)$，$u(0)=0$，$u(2)=-1$を，２次Galerkin関数$\phi_0=1/2x(1-x), \phi_1=x(2-x)$を用いて解け．　(b)　差分法によって，$x=0,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0$でこれを解け．　(c)　両者を比較せよ．

問題B．6

(a)　$u''+u=x^2$ $(0<x<1)$，$u(0)=0$，$u'(1)=1$を，近似として，初めに$\phi=x$を，次に$\phi_1=x$と$\phi_2=x^2$を用いて，解け．

(b)　これを解析的に解け．　(c)　$x=0.2,\ 0.5,\ 0.8$で比較せよ．

B．3　有限スペクトル法

スペクトル法という術語はFourier変換やその他の変換を用いる多くの方法においてかなり一般的に一まとめにして，微分方程式の数値解法に入ってきている．その一層高まる人気は，例えば高速Fourier変換(FFT)による高速化に負っている．これらの方法は節2.6で論じたGalerkin法やRayleigh-Ritz法を含む．

第２章の初めに述べた視点，すなわち，一般化Fourier展開(例えば，固有関数展開)の立場で，スペクトル法は同時にFourier展開法と呼ばれてよい．その実行にお

*)　次を見よ．K.E.Gustafson and R.Hartman,“Graph theory and fluid dynamics,” *SIAM J.Alg.Disc.Math.*, **6** (1985), 643-656.　V^1，V^2，V^3は付録C.1のH_p，H_c，H_dに対応する．

†)　これらはまた，フランス学派によって追求されている．例えば，F.Hecht，“Construction d'une base de fonction P_1 nonconferme à divergence null dans R^3,” *RAIRO Anal.Numer.*, **15** (1981),119-150.

‡)　K.E.Gustafson,K.Halasi and D.P.Young,“A new method for conputing solenoidal vector fields on arbitrary regions,” *Intern.J.Num.Meth.in Fluids*, **5**(1985),763-783.

いて,

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}T_n(t)X_n(x)^{*)}$$

の形の近似がとられる．ここで，$X_n(x)$は指定された展開関数である．それらは固有関数である必要はない，すなわち，勝手にとれるけれども，僅かながらの経験によって，それらが境界条件を満たし，できれば与えられた問題に共通する他の性質をもたせることが要請される．実際節2.6で既に見た様に，多くの場合，既知としての厳密な固有関数$X_n(x)$は最適な選ばれ方をしている†)．

次の例題を考えよう．

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(x,0)=f(x), & 0<x<\pi, \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t>0. \end{cases}$$

変数分離法で解析的に処理すると，展開

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(t)$$

になる．ここで，$X_n(x)=\sin nx$は与えられたDirichlet境界条件をもつ熱作用素の空間部分の固有関数である．このとき，$T_n(t)$に対する変数分離の関係から直接解くのではなく，スペクトル法の数値解はFourier級数をN項で打切って，この近似が偏微分方程式を満たすかどうかを問う形でとられる．

厳密に	Fourier法
射影の意味で	Galerkin法
指定された点で	選点法
直交的に	タウ(τ)法
重み付けの意味で	重み付き残差法
局所的に重み付けて	有限要素法

*)　スペクトル法の文献は，$T_n(t)$の代りに$a_n(t)$をとり，恐らくその$a_n(t)$が厳密な係数

$$a_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(x,t)\sin nx dx$$

を近似する係数であることを意味するかの様にみえる．後者の係数$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はしばしば解$u(t,x)$の(Fourier)係数と呼ばれる．

†)　節2.6で，数値近似u_NはHilbert空間における射影に相当する立場を強調した．他の(例えばTchebycheff)基底関数$X_n(x)$またはϕ_nに対して，それらはより自然にBanach空間の射影とみなされる．所で肝要なことは，関数解析であろうと数値解析であろうと，与えられた偏微分作用素をできるだけ自然に関係づける射影を得ることである．このときどちらの立場でも，よい結果になる．

勝手に幾つか挙げたが，与えられた整合性は本質的に正しい．

手近かな例として“厳密”解に対し，変数分離の手続きによって$X_n(x)$への$T_n(t)$の関係を用いると，$T_n(t)=c_ne^{-n^2t}$．勿論このとき，初期データ$f(x)$を当てはめるには，$f(x)$が$X_n(x)(n=1,\cdots,N)$によって張られる部分空間の元であることが必要である．そうでなければ，$f(x)$の$X_n(x)$展開における初めのN項のFourier係数である様にc_nをとることができない．

Galerkin法は(節2.6参照)予め選ばれた集合$\{\phi_n\}$によって張られた部分空間における射影によって解を近似する，すなわち

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\phi_n(x).$$

方程式がこの部分空間内で近似されるということは，N個の方程式の組

$$\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_N,\phi_m\right\rangle=0,\quad m=1,\cdots,N$$

によって実行される．これはN個の未知数a_nをもつN個の方程式の組

$$\begin{array}{c}
a_1'(t)\langle\phi_1,\phi_1\rangle+\cdots+a_N'(t)\langle\phi_N,\phi_1\rangle=a_1(t)\langle\phi_1'',\phi_1\rangle+\cdots+a_N(t)\langle\phi_N'',\phi_1\rangle,\\
\vdots\\
a_1'(t)\langle\phi_1,\phi_N\rangle+\cdots+a_N'(t)\langle\phi_N,\phi_N\rangle=a_1(t)\langle\phi_1'',\phi_N\rangle+\cdots+a_N(t)\langle\phi_N'',\phi_N\rangle
\end{array}$$

で，いずれも各時刻tに対して成立しなければならない．これは定数行列の係数をもつ

$$Aa'(t)=Ba(t)$$

の形式の1階常微分方程式系にかかれ，初期条件は

$$Aa(0)=\begin{bmatrix}\langle f,\phi_1\rangle\\ \vdots\\ \langle f,\phi_N\rangle\end{bmatrix}$$

からとられる．

$\{\phi_n\}$が正規直交系に選ばれるとき，それがいかに都合よいものであるかに気づく．このときAは可逆であると同時に恒等行列である．$\{\phi_n\}$を自然の固有関数$\phi_n(x)=x_n(x)=\sin nx$に選ぶと，性質$\phi_n''=-n^2\phi_n$を再生する固有関数はBを対角行列にし，ODE系は連立でなくなる．次に，Fourier正弦係数$2/\pi\cdot\int_0^\pi f(x)\sin nx dx$の高速数値近似により初期値$a(0)$が設定され，これから上の**“厳密”解**が構成される．唯一の誤差はスペクトル変換$c_n=a_n(0)=\langle f,\ \phi\rangle$にある．

一般的に，厳密な固有関数を知ることのできる程，だれしも幸運でない．このとき，xで特に境界近くの誤差を一様に小さくするために，Tchebycheff多項式$\{\phi_n\}$

がGalerkinスペクトル展開にしばしば用いられる．問題の境界条件には，できるだけよく深い注意が払われなければならない．問題の幾何学や係数を求めるための高速スペクトル変換の利用などによって，他の特殊関数（例えばLaguerre関数やLegendre関数，節2.1参照）も時には用いられる．

Fourier固有関数展開近似と結びつけられた選点法はときどき**擬似スペクトル法**と呼ばれる．それによって，選点法のため，どの様なスペクトル変換をとるかの問題が，それだけで取り除かれる．選点法においては，方程式残差を，指定された点x_m（例えば，$m=1,\cdots,N$）で恒等的に0にすることが要請される．すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_N(x_m,t)=0.$$

$\{\phi_n\}$部分空間における試行近似u_Nに対して，これは前と同じく$N\times N$の1階ODE系

$$Aa'(t)=Ba(t)$$

を決定する．ただしこの場合各係数は指定された点x_mでのϕ_nとϕ_n''の値である．この方法は有力で，Galerkin法に比べて速く，境界での問題が避けられる．

いわゆる**タウ**（あるいは**Lanczos***)）法はGalerkin法の変形ともみられ，$\{\phi_n\}$のそれぞれが境界条件のすべてを満たすことが最早要求されないけれども，近似解にM個の補足自由度を許容することによって，M個の境界条件の束縛を満たすべき方法が提供される．すなわち

$$u_{N+M}(x,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\phi_n(x)+\sum_{n=N+1}^{N+M}b_n(t)\phi_n(x)$$

に対して，残差は次となる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_{N+M}(x,t)=\sum_{n=N+1}^{N+M}\tau_n(t)\phi_n(x).$$

ここで，$\{\phi_n\}$は完備な正規直交集合と仮定される．節2.3をみると，これは残差が$\{\phi_n\}_{n=1}^{N}$によって張られる空間の直交補空間にあることを意味する．この様に，この方法はまた**直交選点法**とも呼ばれることがある．近似基礎部分空間における残差の部分は厳密に消える．

タウという名称は明らかに上の係数$\tau_n(t)$に由来する．この算法は次の様に実行される．Galerkin法のときと同様，解と方程式の射影近似を達成するために，$\{\phi_n\}$との内積をとる．すると，$N+M$個の未知数をもつ$N+M$個の方程式

$$a'_n(t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{N+M},\phi_n\right),\quad n=1,\cdots,N$$

*）　C. Lanczos, "Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions," *J. Math. Phys.*, **17** (1938), 123-199 および*Applied Analysis,* Prentice Hall (1956).

と，手近かな$M=2$の場合，境界束縛

$$u_{N+M}(0)=u_{N+M}(\pi)=0$$

へと導く．残差のτ係数は$n=N+M+1$に対して$\tau_n=-(\partial^2 u_{N+M}/\partial x^2,\phi_n)$によって与えられ，上の方程式系によって陰に決定された$n<N+1,\cdots,N+M$に対して中間のτ_nをもつことになる．この方法に含まれる多くの事柄に関しては，後述の例題と演習問題にまかせよう．

他の重み付き残差法*)もあるが，ここでは追究しない．方程式に重み付け関数の有限集合$\{\phi_i\}$を乗じ，次に領域全体Ωまたは重み付け関数の台を作るある部分領域について積分する意味で，それらはすべて変分法である．後者の場合は節2.6，節2.9.6また上のB.2で論じた有限要素法を含む．この方法を考えるか否かは，有限スペクトル法がスペクトル変換技法(例えば，FFT)によって，その係数積分を求める必要のある無しによって，決まるだろう．

問題B．7

(*a*) 熱方程式の例題で，ϕ_nとして直交関数$\sin nx$ $(n=1,\cdots,N)$について，Galerkin方程式$Aa'(t)=Ba(t)$をかき下ろせ．

(*b*) 選点方程式$Aa'(t)=Ba(t)$を一般の形で，次に問(*a*)と同じϕ_nに対してかき下ろせ．

(*c*) 他の例題や問題を見出すことのできるスペクトル法を詳しく調べよ．

電算的方法は，線形代数学とグラフィックス出力についての注意なしには完全に議論できない．不幸にも，それらはそれだけで大きな主題である．したがってここでは，解を理解するとき後者の価値の二，三の例に触れるだけにする．

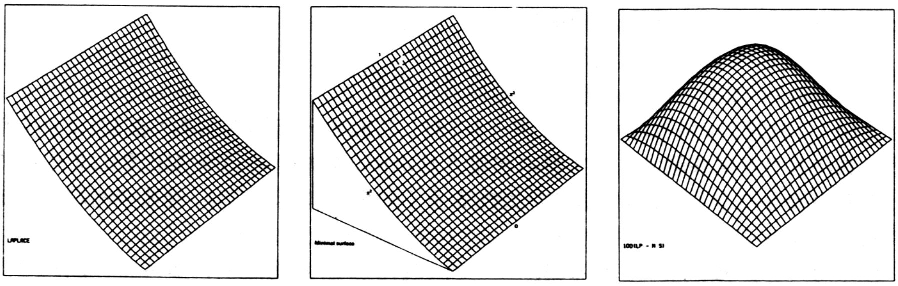
節1.2の問題1を考えよう．正方形の二辺上にデータx^2をもつとき，グラフィックスはラプラシアンに対する解と極小曲面作用素に対する解の間にごく僅かの差を示す(図B.5)．しかし，100倍にした線形化による誤差によって，極小曲面解がラプラシアンのそれの下にかなり深くたわむことがわかる*)．

より興味のあるのは，節2.1問題2の数値解をラプラシアン近似と，極小曲面方程式とで比較することである．図B.6の結果は図2.1*l*の左側から眺めたものである．

方形波のFourier級数“スペクトル法”近似が問題1.9.6(2)(*c*)で求められて，初期データ不連続でのGibbs効果を説明した．$(0,\pi)$上の方形波，$(-\pi,0)$上で$f(x)=-1$，$(0,\pi)$上で$f(x)=+1$のFourier級数は$\sum_{n=1}^{\infty}[4/(2n-1)]\sin(2n-1)x$である．最大値は不連続点から最小波長の1/4離れた点で現われ，-1から$+1$まで跳躍する方形波に対

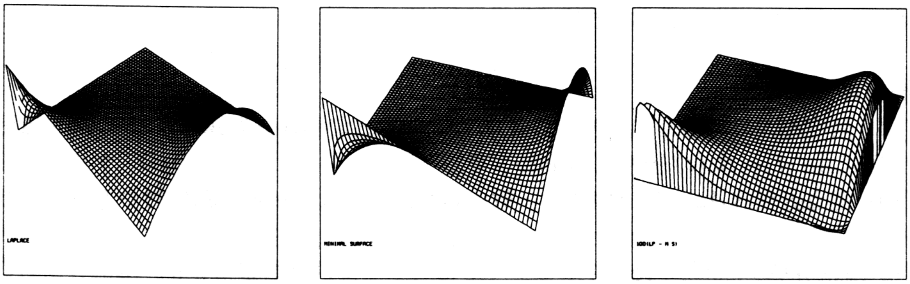
*) 例えば，節2.6におけるAmes, Finlayson(前出)を見よ．

†) この線形代数はこれらの多くの例題で$\omega=1.816$としてSORでなされた．



ラプラシアン(LP)　　極小曲面(MS)　　誤差（100(LP−MS)）

図B.5　節1.2問題1の電算解



ラプラシアン(LP)　　極小曲面(MS)　　誤差（100(LP−MS)）

図B.6　節2.1問題2の電算解

し，節1.9.6(2)の議論から1の上方におよそ

$$1+2\cdot(0.0895)=1.179$$

の値に達すると期待される．この級数を多数の項まで計算すると次の様になる．

項数	Gibbs効果
$N=$ 20,000	1.17897974530
$N=$ 200,000	1.17897974448
$N=$2,000,000	1.17897974447

項数が100，10,000，100,000，1,000,000に対するグラフィックス出力を図B.7に示す．この効果は放物型方程式に対し瞬時に滑らかにされるが，双曲型では持続する．

次の問題は電算的実習の幾つかを補足するものである．

問題B.8

(a)　節2.1問題3を電算的に解け．

(b)　次の問題を電算的に解け．

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & 0<x<1, \quad t>0, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, t>0, & \\ u(x,0)=\begin{cases} 2x & ,\ 0<x\leqq 0.5, \\ 2-2x & ,\ 0.5\leqq x\leqq 1. \end{cases} & \end{cases}$$

(*c*) 最近展開された重要な多重格子近似スキームについて調べよ.

問題B.9

節2.9.8の交通流の問題, すなわち

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$$

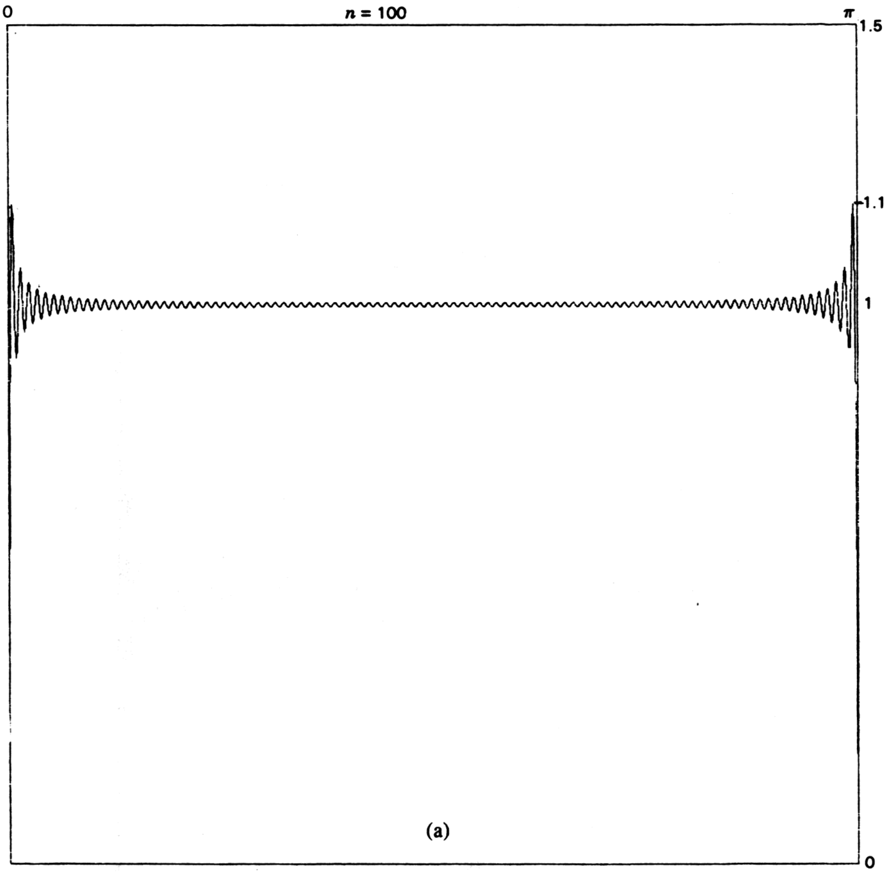
を, 初期条件

$$\rho(x,0) = 200 + 100e^{-0.5((x-0.5)/0.04)^2}$$

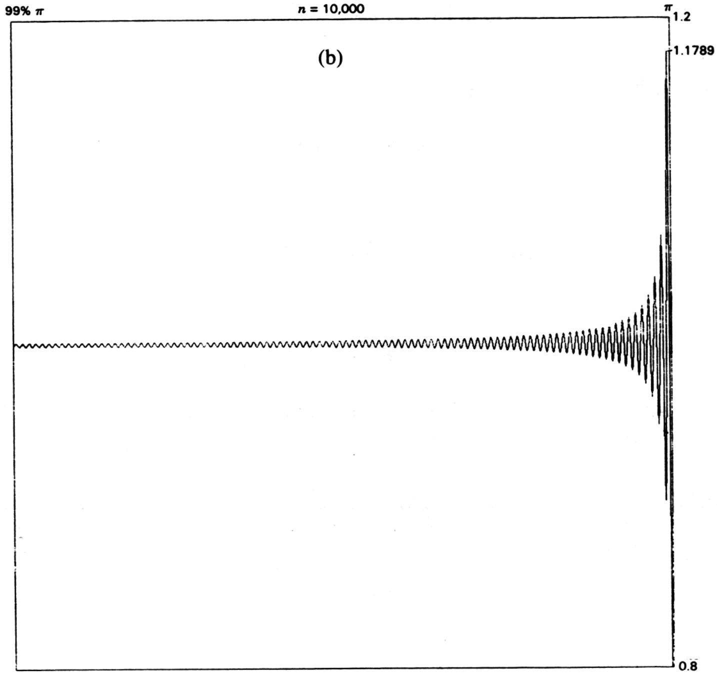
と伝播係数

$$c(\rho) = 76.184 - 17.2\ln\rho$$

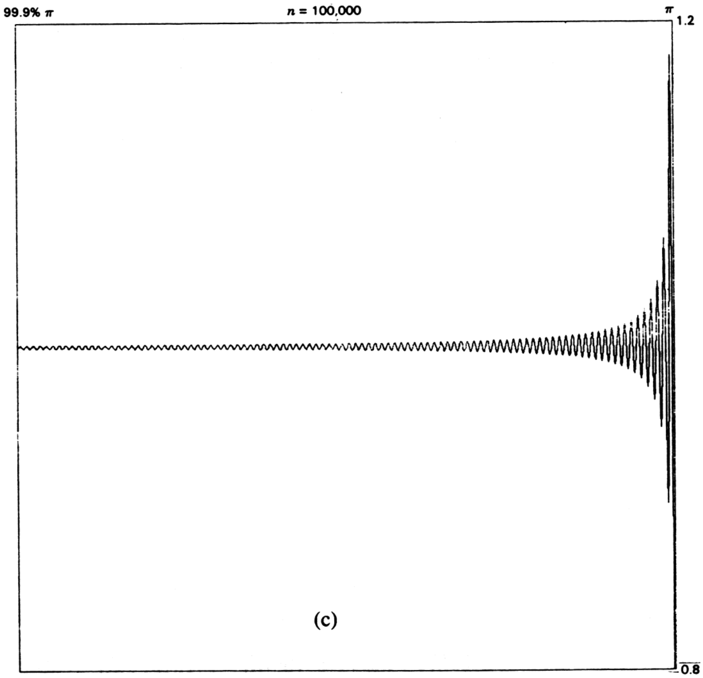
のもとで, (*c*)蛙跳びスキーム, (*b*)Lax-Wendroffスキーム, (*c*)特性曲線スキームの方法によって電算的に解け. この問題にとって, どれがより自然か?



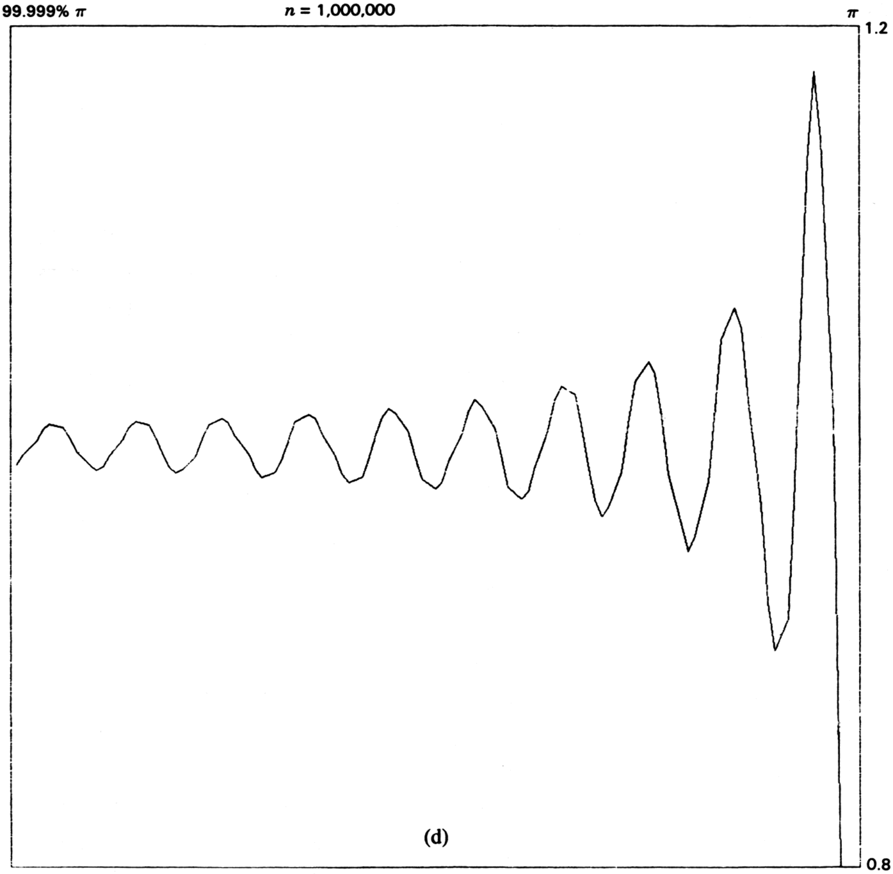
図B.7 節1.9.6(2)問題(*c*)の電算解. 項数は(a)100項, (b)10,000項, (c)100,000項, (d)1,000,000項.



(b)



(c)



(d)

休止　第6回：例題，説明，演習

休止第5回において，衝撃波は移流方程式またはその方程式系の解が滑らかな初期値を与えられたときでさえ，発生し得ることに注目した．このことは衝撃波捕捉スキームの展開へと導いてくれる．このスキームは発展的な双曲型系の衝撃波動力学を見出し，問題を解明することのできる計算方法である．

例題

この様なスキームに対して最も用いられてきたテスト問題は，衝撃波管問題とも呼ばれるRiemann問題である*)．幾つかの衝撃波捕捉スキームによって実際に各時刻ごとにRiemann問題の厳密な解析解が用いられる．このテスト問題†)と双曲型保存則の数値解に使用される主要な型のスキームを議論せよ．

解答　休止第5回の非粘性気体動力学のEuler方程式をふり返っておこう．すなわち，前と同様，同じ理想気体の状態方程式を仮定して，方程式は

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e+p)u \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

物理学的には，Riemann問題は薄い隔膜で二分された細い管で，左側の定高圧の気体と右側の定低圧の気体で分離されていると想像すればよい．時刻$t=0$で隔膜は破れ，気体の流れは右側へ動くピストンと見なされ，その先端は誘発された**圧縮波**である．"ピストン"の背後の状態は**膨張波**である．解析学的には，問題は，初期値$\rho(x,0)$, $u(x,0)$, $p(x,0)$によって物理学的未知関数である密度ρ，速度uおよび圧力pの流れを決定する方程式の純粋な初期値問題とみられる．電算的には，衝撃波が成長すると期待されるから，発展中の数値スキームの精度(ロバストネス)を試すために衝撃波から出発するのが慣例になっている．

原点の位置は任意であるが，標準的なRiemannテスト問題は下記の初期値を用いる：

密度　$\rho_l=1.000$,　$\rho_r=0.125$,
速度　$u_l=0.000$,　$u_r=0.000$,
圧力　$p_l=1.000$,　$p_r=0.100$.

原点は$x=0.500$とする．このとき，流れは区間$0\leqq x\leqq 1$に対して短時間内に計算され，厳密な解析解に比較される．最もよく用いられた停止時間は$t=0.140$で，これはどんな動力学現象も管$0\leqq x\leqq 1$の端点に到達することがない程の十分短い時間であるから，反射，その他を考慮する必要はない．

$t=0.140$における厳密な解析解は図6Paに示される．図6Pbは密度の初期値から$t=0.140$での最終値に到るまでの発展を描いたものである．流れは五つの領域にわたって時間的に発展することに注意する．最も遠い左の領域Ｉでは，何も変化なく，初期定数ρ_l, u_l, p_lはまだ影響を受けない．次の領域IIは一般に右方向への流れによっ

＊) この問題は空間の１次元だけの気体動力学の方程式を扱うから，これは全く"管"の問題でないことがわかる．"管"であればあらゆる種類の高度に複雑な２次元や３次元の波動相互作用を想像できよう．このテスト問題は，休止第１回の"むち"の場合に類似した"衝撃波"の問題である．運動は固定された単一の空間の方向へのみ生じる．発生する**衝撃波動力学**は通常**波動力学**とよばれるが，この空間の１次元的設定に対して射線動力学の言葉で考察することによって幾つかの概念的な単純化を求めていく．

解析的には空間的な２または３次元への拡張は大きなものではあるが，ここで議論される計算上のスキームは空間的２次元や３次元の複雑化した空気動力学や他の気体動力学へ首尾よく応用されてきたことを述べておく．

†) 優れた文献はG.Sod, "A survey of several finite difference methods of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws," *J. Comput. Phys.* **27**(1978),1-31．多くの他の文献と同様，ここでもSodの初期値と最終時刻$t=0.14$を用いる．Sodは，また解析解の見出し方も述べている．

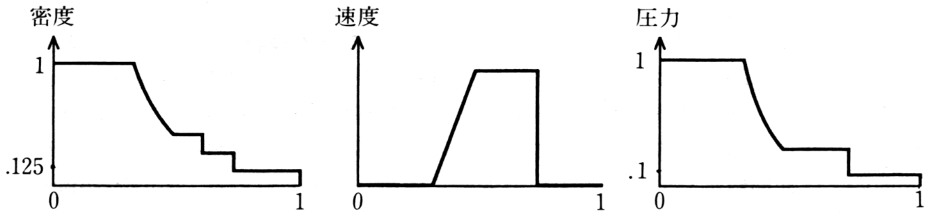


図6Pa. $t=0.14$におけるRiemannテスト問題の厳密解

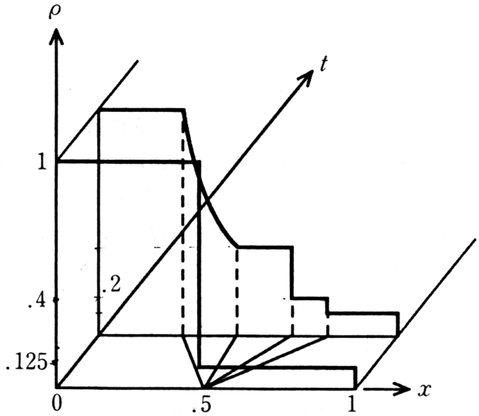


図6Pb.(i)$t=0$の初期状態から$t=0.14$の
最終状態へ到る密度の変化

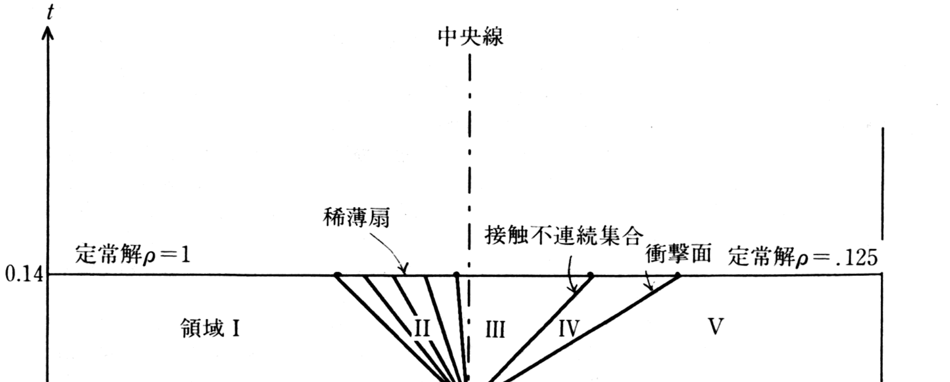


図6Pb.(ii)Riemannテスト問題の密度に対する五つの発展領域

て減じられた左側の高圧と高密度の希薄作用を表している．中央の領域IIIでは“ピストン”背後の速度が最大に達する．初期的に不連続性(ピストン)データにある粒子は領域IIIの最も右寄りの点に位置する．この点は**接触不連続点**とよばれ，(例えば，初期密度の不連続性の)並進作用を表す．領域IVは“ピストン”前面からその先端にある誘発された移流衝撃波を分離する．減少する解の分布に基づいて，圧縮作用は，休止第5回で説明した様に，すべての流れの変数の不連続な衝撃を誘発する．衝撃の前方には初期値ρ_r，u_r，p_rの未だ乱されていない領域Vがある．このRiemannテスト問題の電算的シミュレーションは最後の例と図6Pcに与えられる．

ここである重要な解析的事実，すなわち，一様な伸張群の下でのEuler方程式の不変性をみておこう．(非保存の)原始変数に関するEuler方程式

$$\rho_t+u\rho_x=-\rho u_x$$
$$u_t+uu_x=-\frac{1}{\rho}p_x$$
$$p_t+up_x=-\gamma p u_x$$

を考える．定数λを固定して，x,tを新しい変数λx，λtでおきかえると，$\rho(x,t)$，$u(x,t)$，$p(x,t)$が解であれば，$\rho_\lambda(x,t)\equiv\rho(\lambda x,\lambda t)$，$u_\lambda(x,t)\equiv u(\lambda x,\lambda t)$，$p_\lambda(x,t)\equiv p(\lambda x,\lambda t)$も解であることがわかる．各導関数ごとに$\lambda^{-1}$が現れることに注意．いい換えれば，古典解は射線$x/t=\eta$＝一定，もっと一般的な射線$(x-x_0)/(t-t_0)=\eta$＝一定の上に延長されるということである*)．

よって，Riemannテスト問題に対して初期データが$x=0.5$を除き古典的(事実，平坦)であるから，発展解を初期解から射線に沿ってほとんど古典的な(事実，平坦)接続された解とみなしてよい．先に述べた五つの領域の内側の境界で四つの例外が起こり得る．すなわち，これらの境界上での射線解は弱解であるかもしれない．原点の右方または左方に向う一点xに止まっていると，丁度二回，瞬間的に通過する解の

*)空間次元1の1階保存則の系$u_t+(f(u))_x=0$はすべてこの性質のおかげを受けているが，このことは連鎖規則によって確かめられる．例えば，単独方程式で希薄扇解$u(x,t)=u(x/t)$(休止第5回の演習問題4参照)を選ぶとき，誰もがこの性質を用いてきた．しかし，これだけでこの性質を**射線解**とよんだ(先の脚注参照)(唯一の)物理学的解を選ぶ際の一般的な解析学的な原理であると強調するほど認めてはいない．射線解よりもこれらを**粒子解**と呼んだ方が適切かもしれない．

同じスケール不変性は高次元空間の保存則に対しても成り立つ．解は平面，球面とみられる解となることもあるだろうが，ここではこの方面へ深入りするつもりはない．この様な見方はまさに，好むがままに次元解析または局所変換群を用いるスケール不変性そのものである．接続された解は同様に射線上の解である．付録Aを見よ．群論の立場からは拘束条件である初期値や境界値を無視して，無限領域$-\infty<x<\infty$を考えていることになる．

この解析は古典的である解に依存し，そして不連続な解や導関数，例えば衝撃，接触不連続点，および扇境界において破れをきたす．しかし，例えば休止第5回の衝撃波動力学の議論に沿う様な適当な設定のし直しによって原理的にこれらの点からでさえ射線解を接続することができる．例えば，対流方程式$u_t+uu_x=0$の場合，衝撃点において二つの入射してくる特性方向の平均に向く射線に“再設定”を行う．これを遅い粒子に追いつく速い粒子とみなすと(同質量の粒子)，種々の評価基準(Rankine-Hugoniot，弱解，正則性)はその速さが二粒子の入射してくる速さの平均で，かつその方向が入射方向の平均である一つに“まとめられた”粒子を新たに生み出すことに他ならなくなる．

不連続性を観測する．いったんそれらが通過すると，解はそれ以後定常的である．

更に進んだ定性的な議論に対しては演習問題1と2を参照せよ．

定量的方法にもどると，使用する計算スキームは次の三つの型に分類される:

上流型(Godunov, Glimm, Roe, Van Leer, Steger, Osher, ・・・)

中心型(Lax, Wendroff, MacCormack, Yee, ・・・)

TVD(全変動逓減)型(Harten, Boris, Book, Colella, Jameson, ・・・)

演習問題の3，4，5を見よ．以下ではこれらのスキームの本質を極めて簡潔に述べるにとどめるが，上の分類には幾分重なりもあり，研究者名もすべてではない．

演習問題

1．Riemannテスト問題の解の性質についてより深く定性的に洞察を行ってみよ．

2．接触不連続性，いわゆるRiemann不変量および系の固有値と固有ベクトルの役割りを定性的に議論せよ．

3．上流型スキームを簡潔に述べよ．

4．中心型スキームを簡潔に述べよ．

5．全変動逓減型スキームを簡潔に述べよ．

全般に，双曲型の系に対する電算図式は流束分裂*)の簡潔な議論と合わせて行われる．準線形の一般的な双曲型方程式系を考えるが，対角化する：

$$U_t+F(U)_x=t\rightarrow U_t+A(U)U_x=0 \rightarrow u_t+Du_x=0.$$

ここで，Uと$F(U)$はそれぞれ物理量とその流束，Aはヤコビアン$\partial F/\partial U$，$D=Q^{-1}AQ$は対角固有値行列，Qは固有ベクトル行列，$u=Q^{-1}U$である．

例題

上記の様に対角化された系が与えられたとき，片側差分の安定性を調べよ．これらの考察と流束分裂およびEuler方程式系との関係を述べよ．

解答　連立しない一般の双曲型方程式系はn個の方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=0 \quad (i=1,\cdots,n)$$

から成る．ここで，固有値λ_iは異なる実数であるとする．空間的後退差分(付録B参照)

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x_j=j\Delta x}=\frac{u_j-u_{i-1}}{\Delta x}+O(\Delta x) \quad (i=1,\cdots,n)$$

*)　次の論文は流束分裂と空間的1次元および2次元のEulerの気体動力学方程式への応用に関するよい文献である．R. Warming and R. Beam, "On the construction and application of implicit factored scheme for conservation laws," *Symposium on Computational Fluid Dynamics*, SIAM-AMS Proceedings, **11** (1978), 85-129.

を用いると，上の偏微分方程式系は半離散的な常微分方程式系となる．

$$\frac{du_i}{dt}+\lambda\frac{u_j-u_{j-1}}{\Delta x}=0 \quad (j=1,\cdots,m).$$

Von Neumannの方法(付録B.1参照)によって,このスキームの安定性は単独Fourierモード$u_j(t)=v(t)e^{ikj\Delta x}$を代入することによって,

$$\frac{dv}{dt}+\frac{\lambda(1-e^{-ik\Delta x})}{\Delta x}v=0.$$

$\lambda\geqq 0$のとき，解$v(t)$はすべての$t>0$に対して有界であり，また逆も成り立つ(演習問題6参照)．

同様に，空間的前進差分を用いて半離散的常微分方程式系

$$\frac{du_j}{dt}+\lambda\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x}=0 \quad (j=1,\cdots,m)$$

を得る．このスキームは$\lambda\leqq 0$のとき安定である．

Euler方程式の場合は固有値が$\lambda_1=u-c$，$\lambda_2=u$，$\lambda_3=u+c$である(休止第5回，演習問題9)．速さuが音速$c=(\gamma p/\rho)^{1/2}$を超えるとき，三つの固有値は正となり，後退差分が適している．これが**上流型**である:上向き流れの傾斜$(u_j-u_{j-1})/\Delta x$を用いると，右方移動波に対して次段の下流値を予測できる．また，速さuが音速cを下回るとき，**下流型**，すなわち前進差分が好ましい．しかし一般に固有値の符号はまちまちである．

両者の不整合性を除く方法は流束を“分裂”させることである．すなわち，保存則の流束を次の様に分裂する．

$$F=F^++F^-\rightarrow A=A^++A^-,\ \text{すべての}i\text{に対して}\lambda_i(A^+)\geqq 0,\lambda_i(A^-)<0.$$

このとき，保存系の1階差分スキーム

$$\frac{U_j(t_n+\Delta t)-U_j(t_n)}{\Delta t}+\frac{\nabla_x F_j^+(t_n)+\Delta_x F_j^-(t_n)}{\Delta x}=0$$

はすべての固有値に対してCourant-Friedrichs-Levyの安定条件$|\lambda^{\pm}|\Delta t/\Delta x\leqq 1$(**CFL条件**)が満たされるときはいつでも安定である．ここで∇_xは前進差分．Δ_xは後退差分を示す．

Eulerの気体動力学方程式は，流束ベクトル$F(U)$がUの1次同次関数であるという重要な解析的性質をもつ．すなわち，$F(\lambda U)=\lambda F(U)$*)．この性質の意味は$F(U)_x$

*)この性質と以前に見た一様な時空スケーリングの下での不変性を合せると興味深い．$\overline{x}=\lambda x$，$\overline{t}=\lambda t$および$\overline{u}=\mu u$とすると，Euler方程式はこの拡大されたLie群の下で不変である．これは解を“射線”解とする見方へより深い見解を与えてくれる．両不変性は空間的2次元および3次元の場合に対しても同様に成り立つ．しかし，こんにちでは4次元または5次元の解を視覚化する必要があるが，これはずっと難しい．

$=F'(U)U_x$であり，$F'(U)$は保存系の準線形の定式化で既に得たヤコビアン$A(U)$である．よって，保存形式でこの系は

$$U_t+(AU)_x=0.$$

ところが準線形の定式化では

$$U_t+AU_x=0.$$

すなわち，$A(U)$は定数であるかの様に空間導関数が入り込まない．この性質を用いると，先の流束分裂は，$F^+=A^+U, A^+=QD^+Q^{-1}$に基づいて実現される．ここで，D^+は$\lambda_j<0$であるDの対角成分を0とした行列である．同様に，$F^-=A^-U$，$A^-=QD^-Q^{-1}$(演習問題7)．

任意の上流型差分スキームは適当な方法で数値的な粘性を導入できる．このことを単独の並進方程式によって説明しよう．固有値は$\lambda\equiv c>0$とする．

$$u_t+cu_x=0,\ -\infty<x<\infty, t>0.$$

時間について前進差分と，空間について後退差分をとって，

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\lambda\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0$$

は次の様にかかれる．

$$u_j^{n+1}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\lambda u_{j-1}^n+\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}\lambda\right)u_j^n.$$

CFL条件$\lambda\Delta t/\Delta x\leqq 1$の下で，このスキームは安定かつ単調である．すなわち，最大値ノルムに関していえば

$$\max_j|u_j^{n+1}|\leqq\max_j|u_j^n|.$$

上の式を再びかきかえて

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\Delta t\lambda\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}+\Delta t\lambda\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{2\Delta x}.$$

この安定な上流型単調スキームは連続な粘性方程式

$$u_t+\lambda u_x-\left(\lambda\frac{\Delta x}{2}\right)u_{xx}=0$$

の2階の離散化とみなされる．

演習問題

6．片側の後退差分と前進差分に対して安定性に関する議論を完成させせよ．

7．一般の双曲型方程式系に対して流束分裂に関する議論の詳細を遂行せよ．またEuler方程式を例にあげて，それを調べよ．

(a)　$0 \leqq t \leqq \tau(\tau = 0.035)$

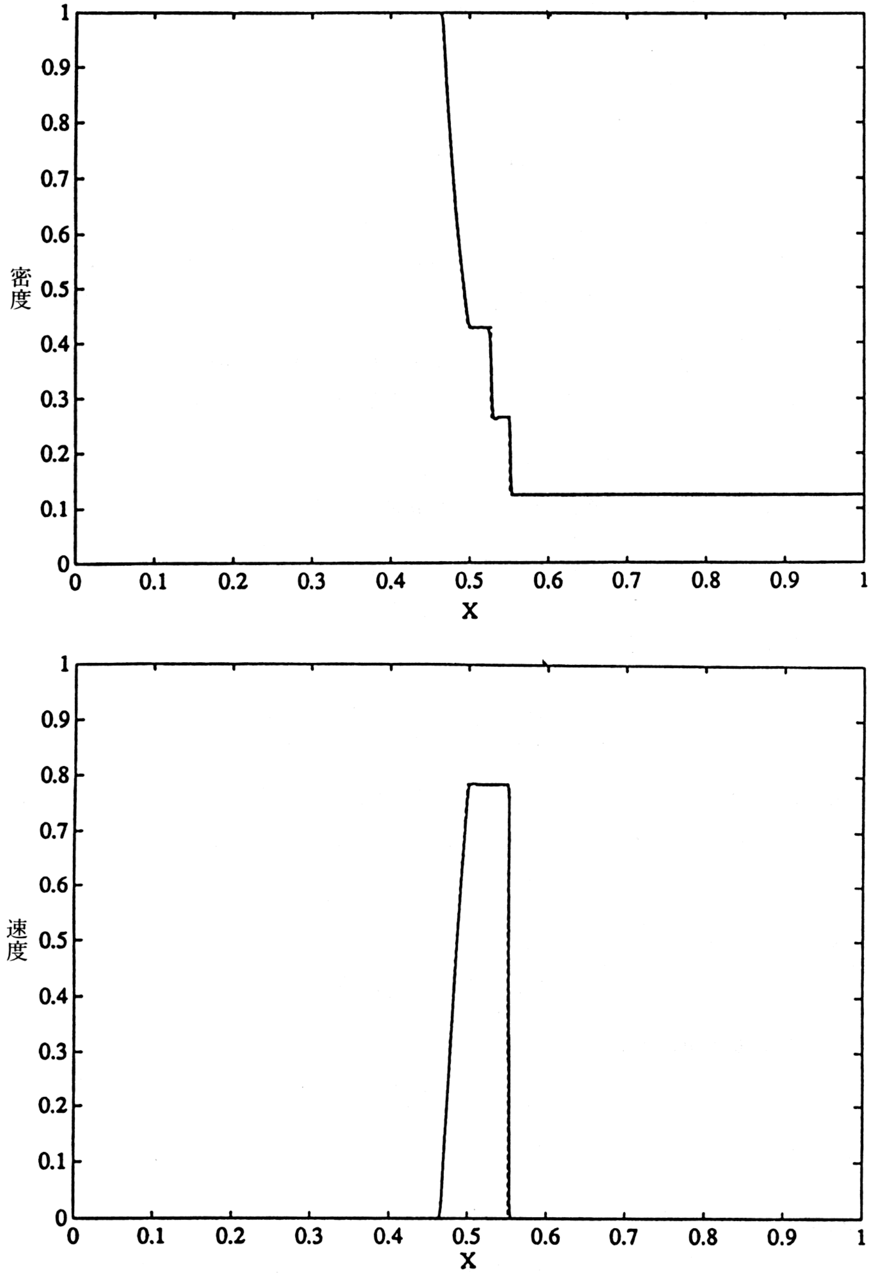
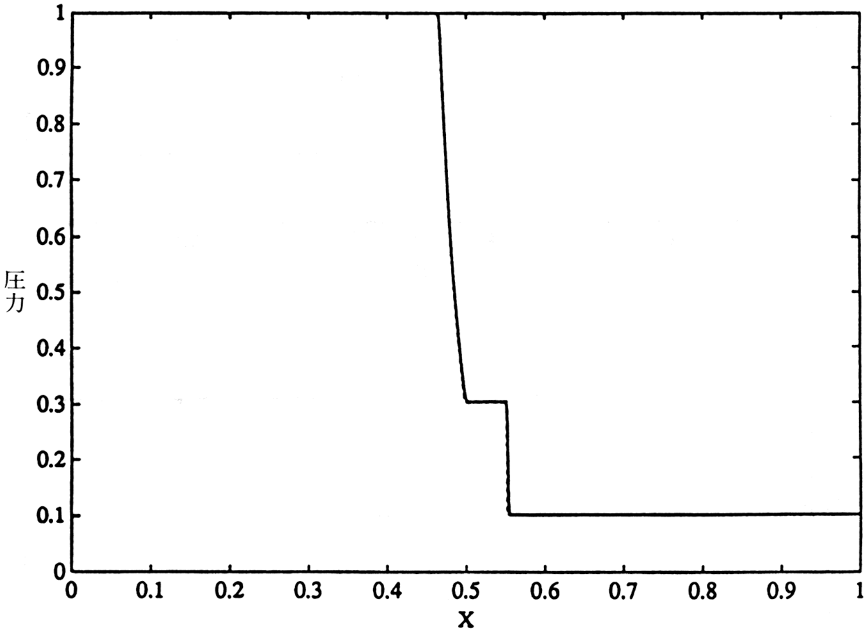
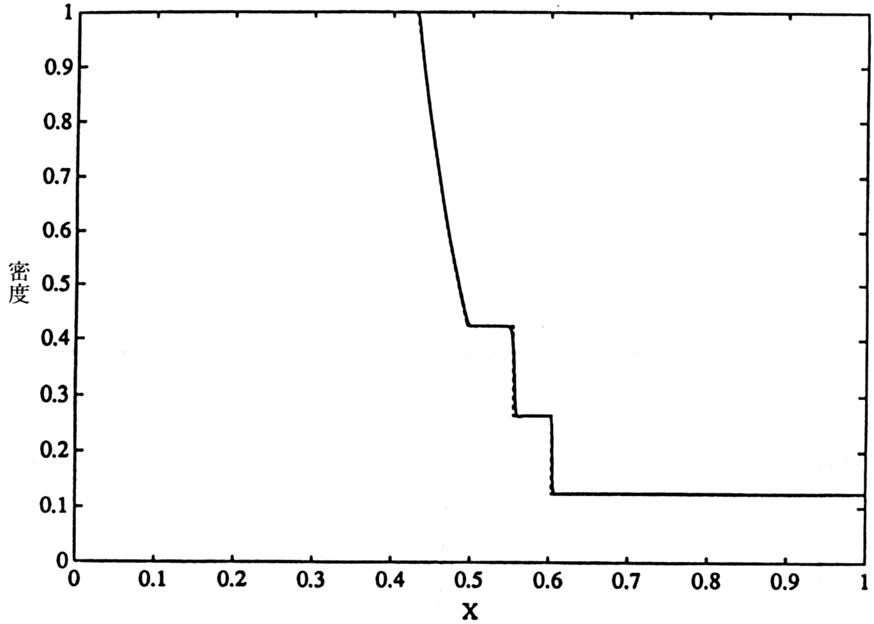


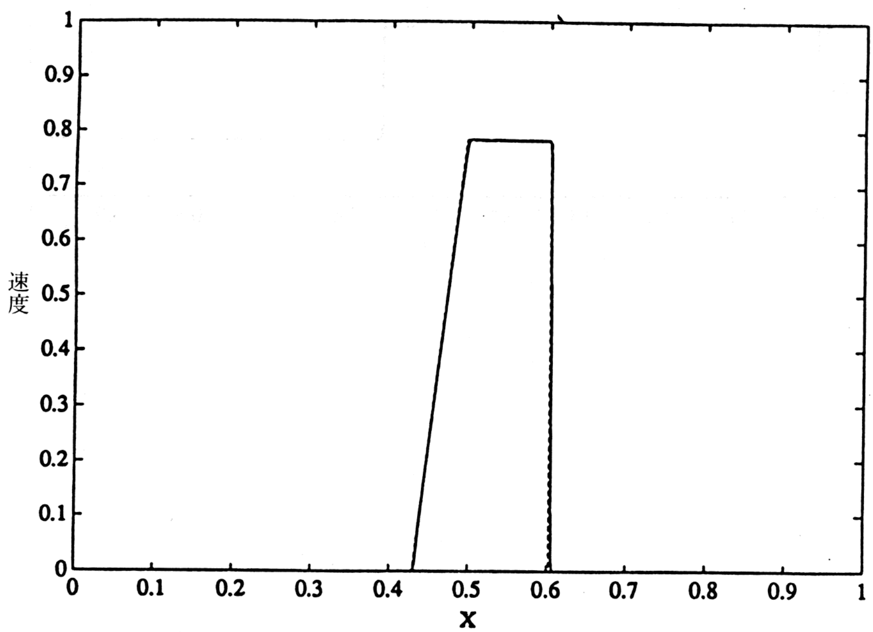
図6Pc.(i)$\Delta x = 0.001$(X上の格子点数1001)，$\Delta t = 0.00014$($[0,\tau]$のステップ数250)に対する数値解(実線)と厳密解(破線)

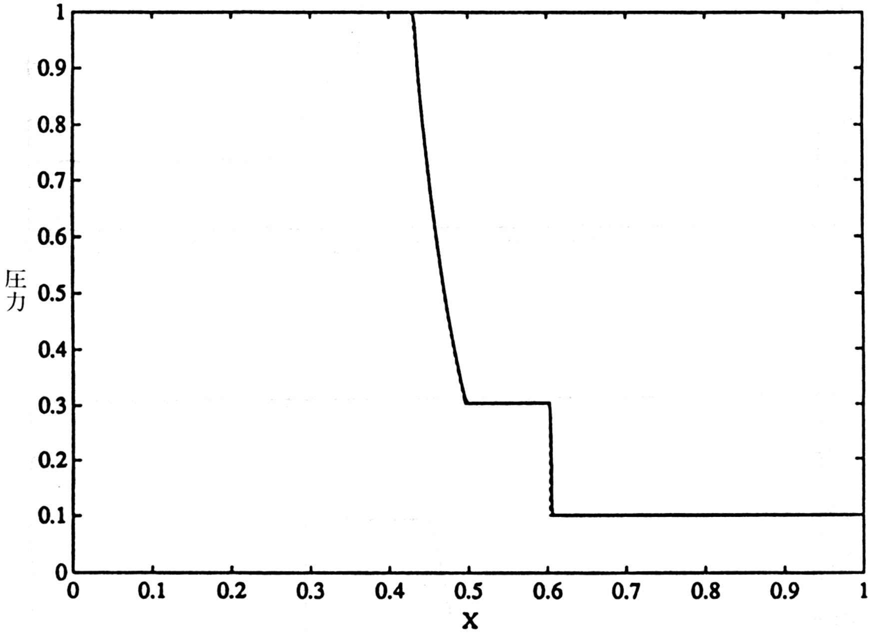


圧力
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

(b)　$0 \leqq t \leqq 2\tau$

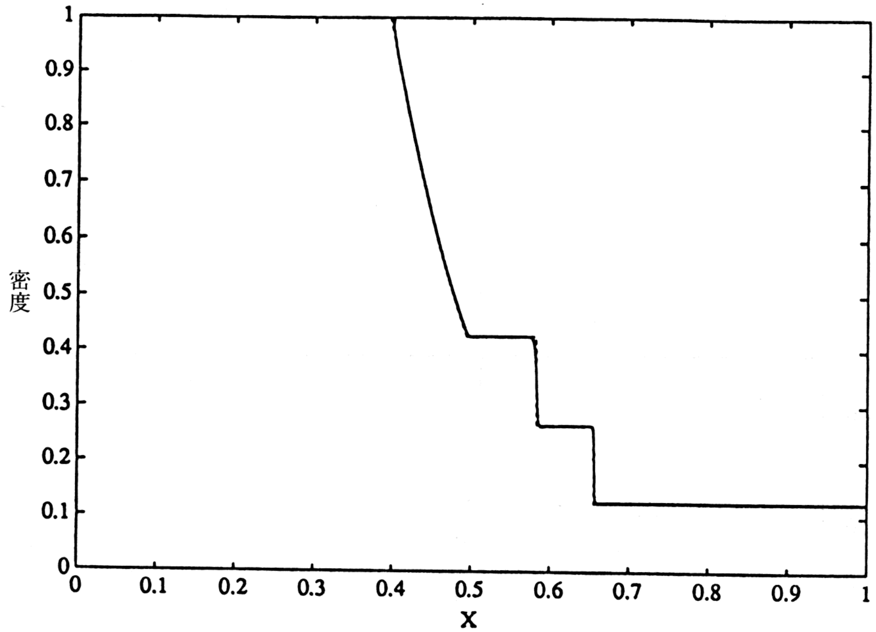


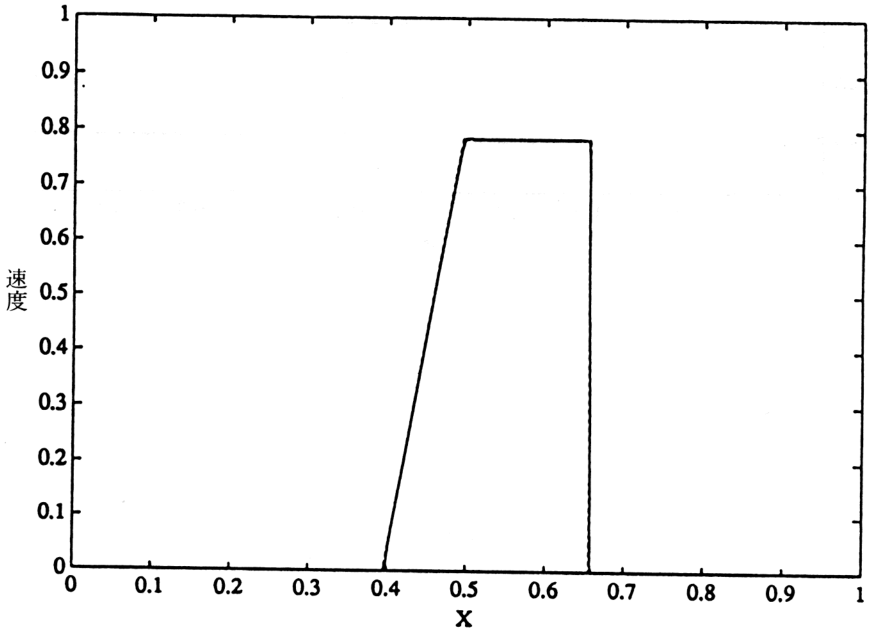


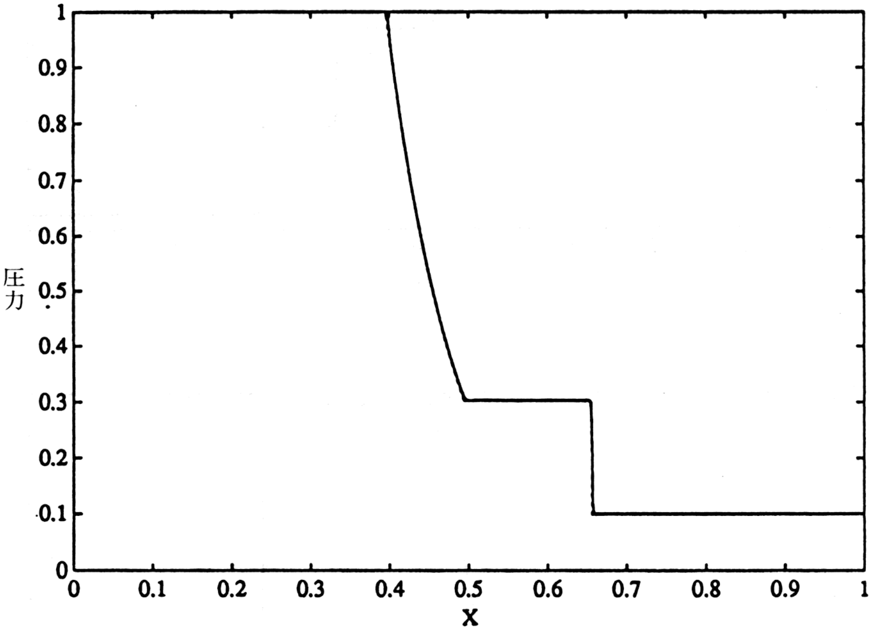


圧力
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

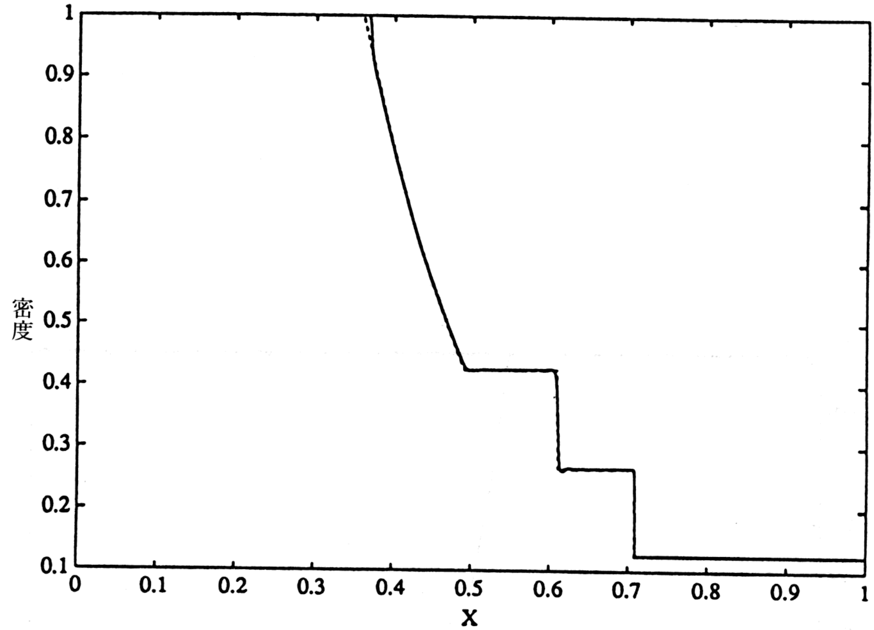
(c)　$0 \leqq t \leqq 3\tau$

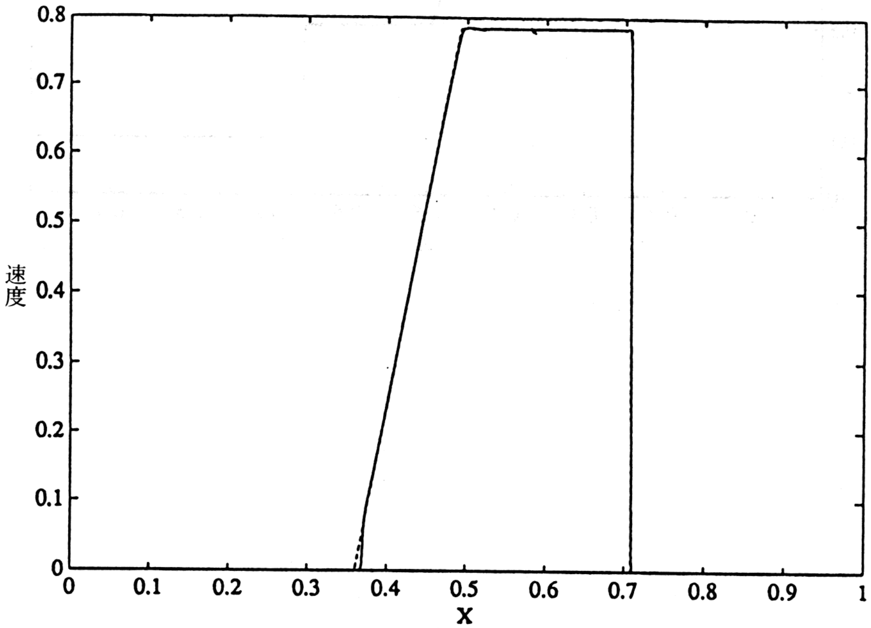


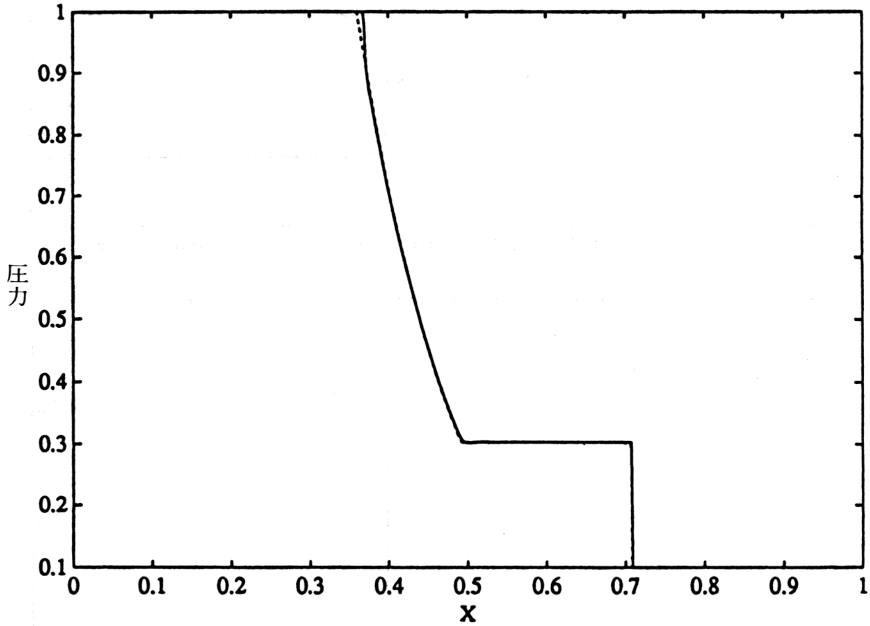



1
0.9
0.8
0.7
0.6
圧力
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

(*d*)　$0 \leqq t \leqq 4\tau$







圧力
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$0 \leqq t \leqq \tau (\tau = 0.035)$

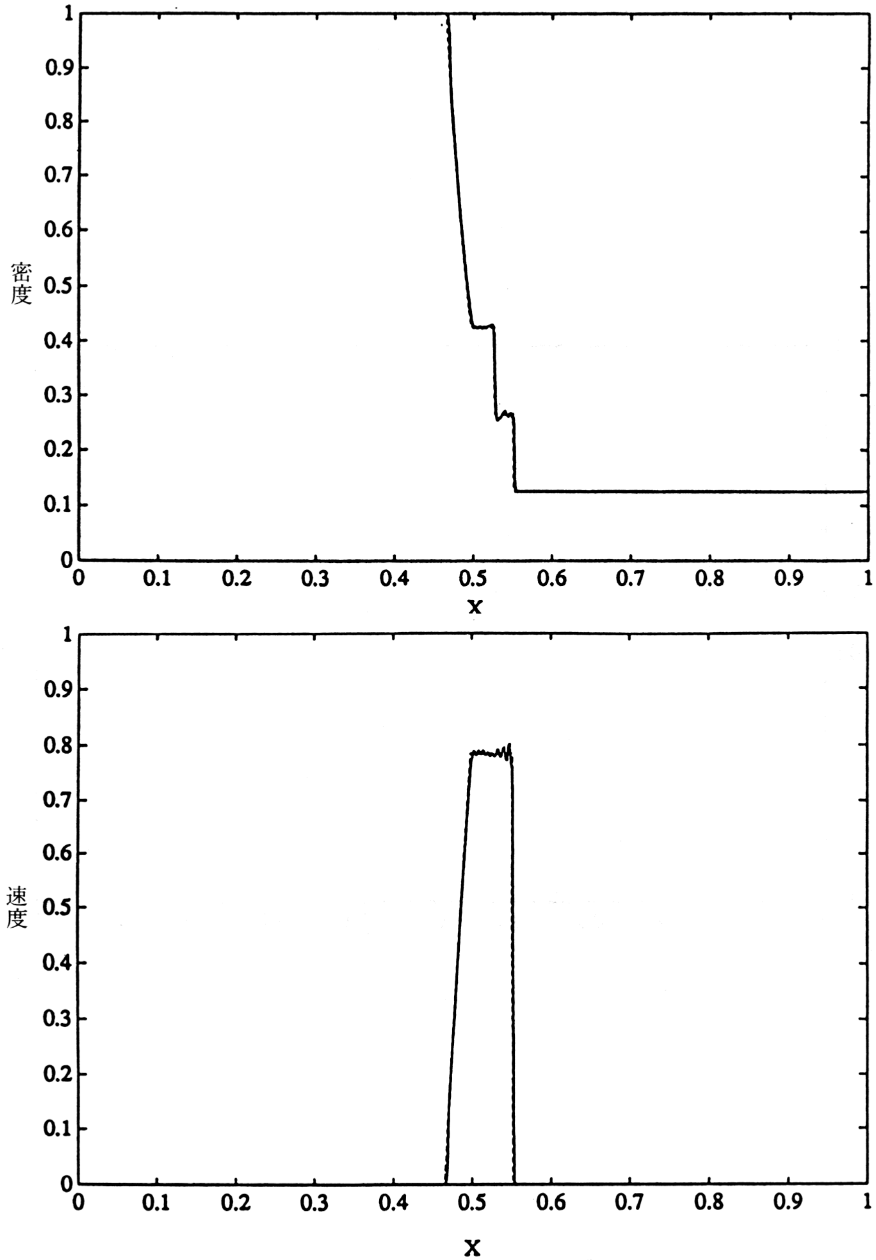
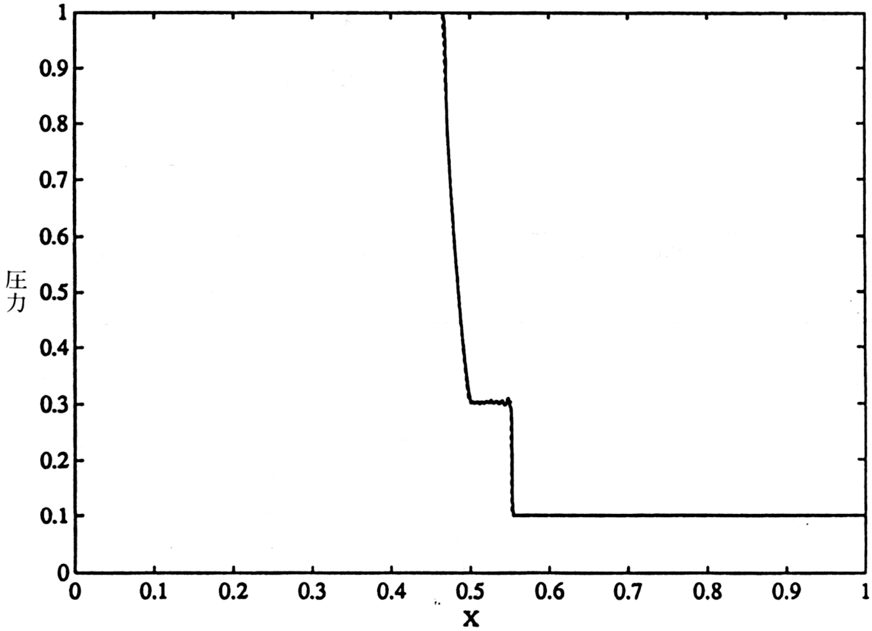


図6Pc.(ii)$\Delta x = 0.001$(X上の格子点数1001)，$\Delta t = 0.00035$($[0, \tau]$のステップ数100)に対する数値解(実線)と厳密解(破線)



圧力
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
X

$0 \leqq t \leqq 4\tau (\tau = 0.035)$

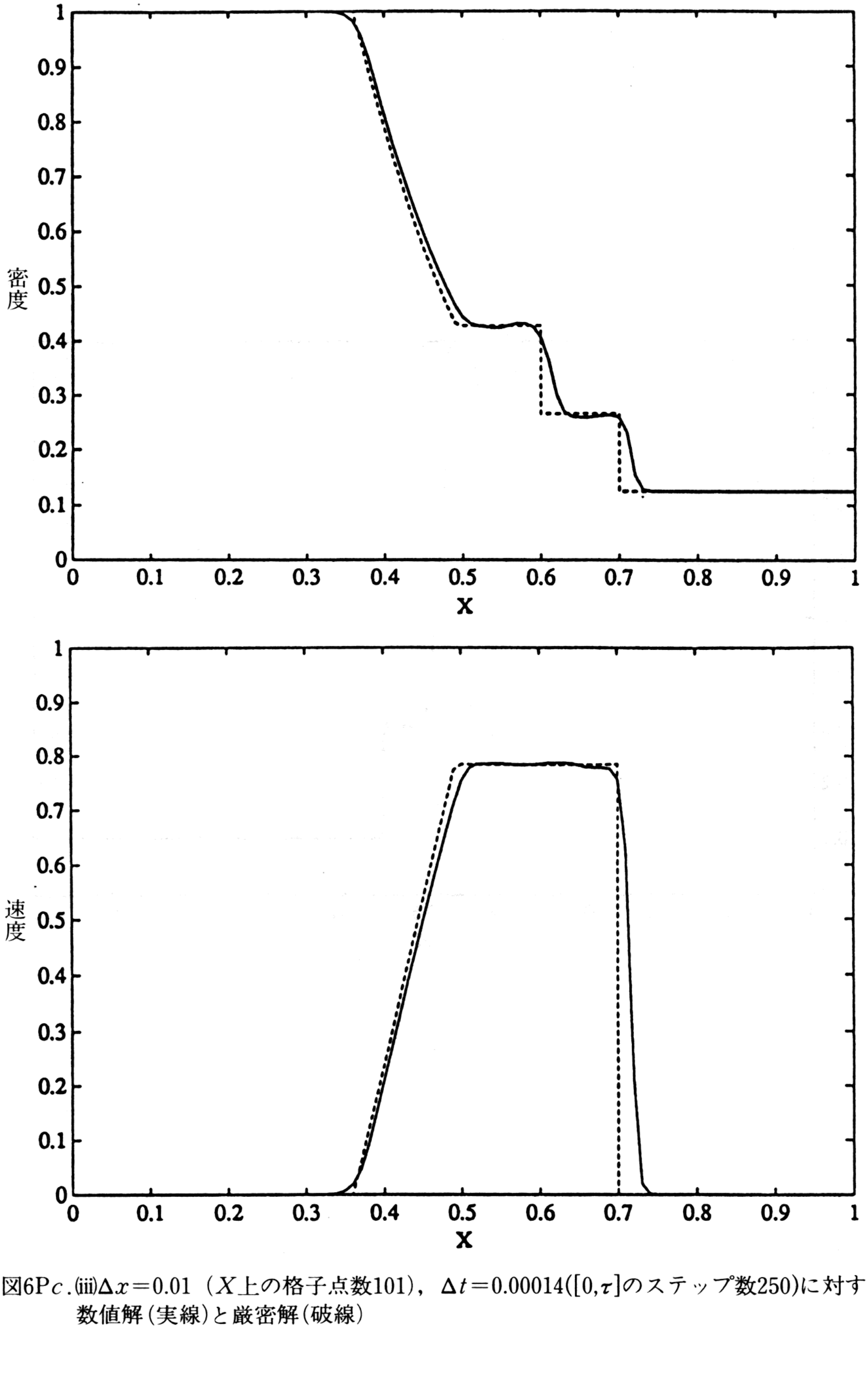
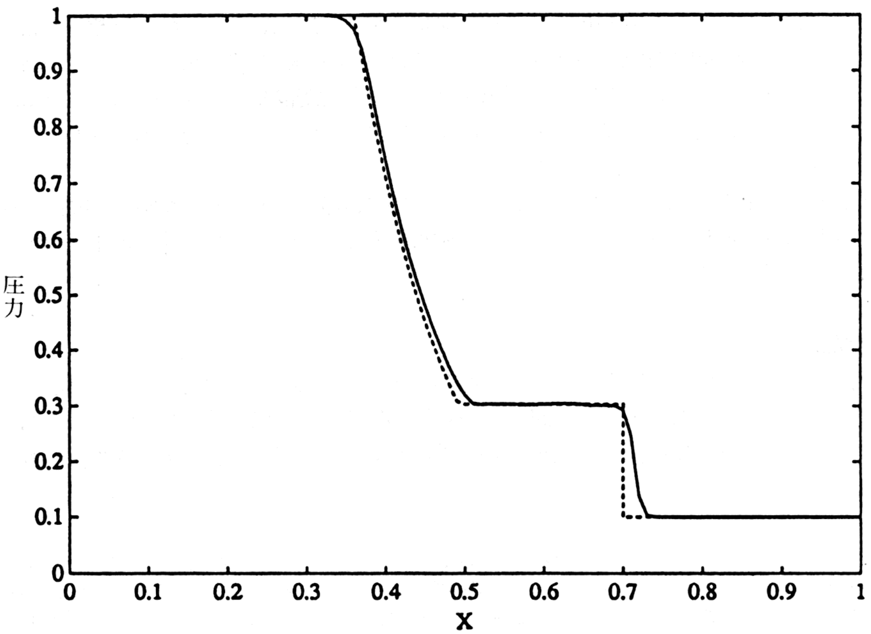


図6Pc.(iii)$\Delta x = 0.01$（X上の格子点数101），$\Delta t = 0.00014$（$[0, \tau]$のステップ数250)に対する数値解(実線)と厳密解(破線)


1
0.9
0.8
0.7
0.6
圧力
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

8．粘性を物理学的に，解析学的に，または上で述べた様に電算的に考察せよ．

衝撃波捕捉スキームとRiemann衝撃波管テスト問題の議論を終えたので，電算的シミュレーションの番である．

例題　Euler双曲型方程式系に対するRiemannテスト問題の数値解をコード*)し，実行せよ．

解答　Roeの2階スキームが最良の結果を生んだ．先に述べた通り，密度，速度，および圧力に対する初期値は$0 \leqq x \leqq 1$において$t=0$で与えられ，流れは最終時刻0.14まで成長し続けた．予想された流れの概形は図6Paと6Pbに既に与えられた．図6Pc(i)は$t=0.035, 0.070, 0.105, 0.140$での流れの発展を示している．この細かい格子($\Delta x=0.001$)と小さい時間間隔($\Delta t=0.00014$)の上で数値解(実線)と解析解(破線)とを区別することはほとんど不可能である．最初の二，三の時間間隔にわたる速度(ここでは示していない)は急成長して流れを押し始める(有限の)デルタ関数的な形状を伴った最大値に達する．

数値解と解析解の不一致をよりよく見るために，図6Pc(ii)は大きな時間間隔にわたって現れる微小Gibbs振動を示し，空間変動の離散化がずっと粗い場合の不一致性が図6Pc(iii)に示されている．

演習問題

9．休止第5回と第6回で扱った双曲型保存則系に対して通常の三つの疑問(存在，一意性，安定性)と他の疑問三つ(構成，正則性，近似)に関する要約または注釈を行え．この“確認的”演習を完成するために本状況下での第1章の三つ組の議論を熟考せよ．

*)ここで本書に示されたすべての電算解についていえば，あるコードは著者によって，またあるコードは共同研究者によって，そしてまた著者の要求に基づいて学生達によってそれぞれかかれたものである．協力された人々へ心から感謝する．特に，このシミュレーションのコードは著者の‘偏微分方程式(1990-91)’を受講した日本からの訪問学生であるKisa Matsushimaによってかかれたものである．

付録C. 高等流体動力学

“高等”流体動力学とは，目下進行中，すなわち，数理流体動力学で最近行なわれている研究である．流体動力学における古い困難な問題の，理論においても実験においてもその多くは，未解決のままである．しかし電算機の出現によって，純粋の理論や物理学的な室内実験の枠を超えて，第三の窓が開かれ，流体の挙動の知識を豊富にした．これら解析的方法，実験的方法，電算的方法の結びつきは，それぞれに，刺激的な進歩をもたらした．

ここでは，その主題について僅かに触れることしかできない．すなわち，Navier-Stokes方程式を簡潔に眺めること，最終の流体の状態や乱流の形成についての最近の考察，そして**計算流体動力学**と呼ばれる数学の新しい全分野．

C.1 Navier-Stokes方程式

Navier-Stokes方程式*)は多くの流体の流れを正しく記述する．その成り立つ範囲は，最初想像していたものをはるかに超えて，大変な高速現象にまでおよぶ†)．実質に働く力を無視し，密度を一定と仮定すると，節1.7で与えた一般の非圧縮粘性流体のNavier-Stokes方程式が考えられる．すなわち，運動量方程式

$$\begin{cases} u_t - \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + uu_x + vu_y + wu_z = -p_x, \\ v_t - \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + uv_x + vv_y + wv_z = -p_y, \\ w_t - \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z. \end{cases}$$

質量の連続方程式

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

ここで，$\vec{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3) = u$は記法のちがいこそあれ速度であり，$p$はその勾配を介してのみ効果の現われる(未知)圧力である．簡単のため，閉じた容器ΩとDirichlet境界条件と初期条件のみを考えよう．すなわちすべての時刻で$\partial\Omega$上の$\vec{u}(\vec{x}, t)$が知られ，初期的に$\vec{u}(\vec{x}, 0)$が与えられる．粘性は$\nu = 1/Re$であり，ReはReynolds数を示し，簡単にいって推定された平均的流れの速さである．

*) これは初めC.L.M.H.Navier(“Memoire sur lois du mouvement des fluides,” *Mém. Acad. Sci.* **6** (1823), 389-440)によって得られ，G.G.Stokesによって修正された．G.G.Stokes, “On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids,” *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8 (1846), 287-319.

†) 次を見よ．D.Tritton, *Physical Fluid Dynamics* (Van Nostrand, 1980).

問題C.1

(a)　重要な物理学の偏微分方程式を1次元問題で見ることは,常に教訓的である*).
Navier-Stokes方程式を1次元でかき下ろせ.

(b)　1次元，2次元，3次元の方程式に対して，運動量方程式に非圧縮性の制限を加えて，圧力に対するNeumann-Poisson問題を見出せ.

(c)　1次元でみると，問(b)は何を意味するか？

この問題から，Navier-Stokes方程式に対する次元の重要性が生ずる．2次元に対しては，基礎的な存在性，正則性，一意性の理論がかなりよい形でみられる†)．3次元に対し，解がどんなとき特異性を発達させ得るかの重要な疑問が，未解決のまま残される.

物体に働く力が在る(例えば重力の影響)とき，非同次Navier-Stokes方程式

$$u_t-\frac{1}{Re}\Delta u+(u\cdot\nabla)u=-\nabla p+f$$

は一般に放物型方程式に対する方法で扱われる.それは本質的に,初め(ベクトル型)熱方程式

$$u_t-\frac{1}{Re}\Delta u=f$$

を考え，次に(非線形)摂動項$(u\cdot\nabla)u$を含ませて解かれる．圧力勾配と非圧縮性流体速度の間にある重要な直交性がここに現われる．これは**Helmholtzの定理**と呼ばれ,一種のDirichlet直交射影定理(節2.6)の一般化とみなすことができる.すなわちここでは，ベクトル場すなわちベクトル値関数$u=(u_1,u_2,u_3)$の射影に拡張された．領域Ω上で定義されたn個の成分をもつこの種の関数uに対して，このHelmholtzの射影定理は次の様にかかれる.

$$(L^2(\Omega))^n=H_{pot}\oplus H_{sol}\oplus H_{irrot}$$
$$=H_p\oplus H_c\oplus H_d.$$

ここで,

*)しばしば，このことについて心に留めなければならない.

†)　次を見よ．R.Temam，*Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis* (SIAM,Philadelphia,1983).(訳者注：同著者による書,*Numerical Analysis*,D.Reidel(1973)があるが，前掲書に関係深く，邦訳がある．数値解析特論――偏微分方程式の近似解法――（前田一和訳)，産業図書).

$$H_p=\{u|\mathrm{div}\,u=0,\mathrm{curl}\,u=0\},$$
$$H_c=\{u|\mathrm{div}\,u=0,\mathrm{curl}\,u\neq 0\},$$
$$H_d=\{u|\mathrm{div}\,u\neq 0,\mathrm{curl}\,u=0\}$$

は，**ポテンシャル部分空間，ソレノイド部分空間，発散部分空間**と呼ばれる部分空間を示す．最後の発散部分空間は**渦無し部分空間**ともいわれるが，簡潔であることと，$u=u_p\oplus u_c\oplus u_d$と三個の直和部分に分解される任意の$u$に対して$\mathrm{div}\ u=\mathrm{div}\ u_d$なることに気付かせるためにここでは，添字$d$をとった．$\mathrm{curl}\ u=\mathrm{curl}\ u_c$も同様である*)．

上記定理は，演算子法的に次の問題で展開されるアルゴリズムによって確立される．

問題C．2

(a) 次のDirichlet-Poisson問題を解け．$u_d=\nabla\phi_3$とおけ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta\phi_3=\mathrm{div}\ u, \\ \partial\Omega\text{上} & \phi_3=0. \end{cases}$$

(b) 次のNeumann-Poisson問題を解け．$u_p=\nabla\phi_1$とおけ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta\phi_1=0, \\ \partial\Omega\text{上} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial n}=n\cdot u-\dfrac{\partial\phi_3}{\partial n}. \end{cases}$$

(c) $u_c=u-u_p-u_d$とせよ．そのとき，$u=u_p\oplus u_c\oplus u_d$.

Helmholtz分解を利用して，運動量方程式から圧力†)を消去することができる．すなわち，勾配はソレノイド関数uに直交するから，積の微分法によって

$$(v_1p)_x=v_1p_x+v_{1x}p,$$
$$(v_2p)_y=v_2p_y+v_{2y}p,$$
$$(v_3p)_z=v_3p_x+v_{3z}p.$$

よって，$v\cdot\nabla p=\mathrm{div}(p(v_1,v_2,v_3))-p\ \mathrm{div}\ v$.ゆえに，$\mathrm{div}\ v=0$のとき

$$\int_\Omega v\cdot\nabla p=\oint_{\partial\Omega}pv\cdot n=0.$$

ここで$\partial\Omega$上でその(不混和の)条件$v\cdot n=0$が用いられた．これの特別の場合がたびた

*) Helmholtzの定理の離散的な場合もまた成り立つ．図B.4参照．同図は射影された2次要素に対する基礎的な台行列を表す．また，より詳しくはそこに与えた文献を見よ．

†) 圧力をなおざりにすることは許されなければならない．そしてこの事を実際の応用で見出すのはかえって重要であるかもしれない．

び仮定された滑り無し条件，$\partial\Omega$上で$v=0$，である．引続き，発散無し部分空間$H_s=H_p\oplus H_c$の任意のvを乗じて，Ω上で積分すると，運動量方程式は弱い(Galerkin)形式にかえられる，すなわち

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v\cdot u-\frac{1}{Re}\int_\Omega v\cdot\nabla u+\int_\Omega v\cdot(u\cdot\nabla u)=\int_\Omega v\cdot f.$$

この形式は，理論にとってばかりでなく，数値的近似にとっても非常に有用である．

一意的な，あるいは少なくとも到達し得る長時間定常な流れの極限が存在すると仮定して，初項は落され，弱い形式の定常流れの方程式を得る．低Reynolds数(高粘性流れ)に対しては，非線形項$u\cdot\nabla u$がたびたび省略され，データfにReを吸収させて，弱い形式のDirichlet-Poisson問題

$$\int_\Omega(-\Delta u-f)\cdot v=0$$

に帰着される．この弱い形式は次の定常Stokes問題と同値であることを示すことができる．

$$\begin{cases}\Omega\text{内で} & -\Delta u+\nabla p=f,\\ \Omega\text{内で} & \operatorname{div} u=0,\\ \partial\Omega\text{上} & u=0.\end{cases}$$

問題C．3

(a)　非線形項$\int_\Omega(u\cdot\nabla u)v$が弱い定式化で消えることになれば，非常に都合がよい．実際，$\int(u\cdot\nabla v)v$がそうなることを示せ．

(b)　上の強いStokesの定式化が，弱い形式からどの様にして得られるかを，本質的に議論せよ．

(c)　定常の場合，省略なしの3次元Navier-Stokes方程式に対して次の解を確かめよ．

$$\begin{cases}u=\dfrac{-6}{Re}\dfrac{x}{y^2}-3c_1y^2+\dfrac{c_2}{y^2}+\dfrac{c_3}{y^3},\\ v=\dfrac{-6}{Re}\dfrac{1}{y},\\ w=\dfrac{-12}{Re}\dfrac{x}{y^3}+6c_1y+\dfrac{2c_2}{y^3}+\dfrac{3c_3}{y^4},\\ p=\dfrac{-60}{Re}c_1x-\dfrac{12}{(Re)^2}\dfrac{1}{y^2}.\end{cases}$$

C.2 乱流とアトラクター

多くの物理学的な流れは，十分に高いパラメータ値に対して乱流の振舞いをみせる．流体の乱流は長いこと重要な科学的問題であり続けたし，それを研究する糸口は多く存在している．乱流効果をシミュレートするための，そのもの自体のモデルは，航空機の設計その他の応用のために発達してきた．けれども，満足のいく数学的基礎付けは未だなされていない．

力学系の理論における最近の進歩によって，解軌道がやたらにカオス的であっても，決定論的な振舞いを演じ得ることが示されている．その振舞いは，軌道が周期的に，ときには間欠的にあるいは最終的に復帰するアトラクター集合によってしばしば制御される．乱流の振舞いを理解する基礎として，それらの(奇妙な)アトラクターがいかにうまく利用されたかを示す研究が，最近行なわれた*)．

単位正方形または立方体の中の渦巻いている流れを考えよう．Kolmogorov†)は，粘性が流れのより大きな渦に影響しないけれども，粘性に依存するある臨界的な小さな長さl_dが存在して，それ以下では渦が持続できないことを予想した．この長さは物理学的基礎に立つと

$$l_d=(\varepsilon Re^3)^{-1/4}$$

であることが知られる．ここで，εはエネルギー散逸の局所的な時間平均の割合いである．これから，流れが2または3の次元数nに対して十分に大きいが有限の自由度数$N=O(l_d^{-n})$をもつと仮定すると，それは乱流あるいは少なくとも非常にカオス的になるだろうと推測される．十分な(単位)エネルギー散逸εがΩのある小部分に制限されると仮定すると，この事は，真の乱流をもつ流れになる以前に，自由度

$$N\sim Re^{3n/4}$$

の流れが必要であるに違いないことを意味する．Reそれ自身は大きい筈なので(状況に応じて$Re\sim10^3$ないし10^6)，推定される$N\sim10^9$は今日利用できる最大の計算機の能力をはるかに超えている．

ここでは，いわゆる空間的周期モデルの簡潔な考察で満足しよう．すなわち，Ωは多重整数点$\mathbb{Z}^n$にかどをもつ単位正方形または立方体に格子状に作られたすべての空間R^2またはR^3であり，速度ベクトルuは各座標方向にこれらの正方形または立方体上横に周期的である．このとき，uはFourier級数展開

*) これに関しては次を見よ．G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph, *Nonlinear Dynamics and Turbulence*(Pitman, Boston, 1983).

†) 次に出ている解説を見よ．L.Landau and E.Lifshitz, *Fluid Dynamics* (Addison-Wesley, New York, 1953)(訳者注：流体力学(竹内均訳)東京図書).

$$u=\sum_k c_k e^{2\pi i k\cdot x},\ k\in\mathbb{Z}^n$$
$$\mathrm{div}\ u=\sum_k k\cdot c_k(2\pi i)e^{2\pi i k\cdot x}$$

とかかれ，これから，div $u=0$が成り立つための必要十分条件は，すべての$k\in\mathbb{Z}^n$に対して$k\cdot c_k=0$. よって，Stokes方程式の単純化された場合には，実数値の発散無し固有関数は

$$c_k e^{2\pi i k\cdot x}+\bar{c}_k e^{-2\pi i k\cdot x}.$$

ただし$k\cdot c_k=0$. 例えば，R^3で$k=(1,2,4)$に対し，固有関数は$1c_1+2c_2+4c_4=0$を満たす関数のすべてである．固有値は$4\pi^2(k_1{}^2+k_2{}^2+k_3{}^2)$である．

さて，Kolmogorov臨界長さとして，渦構造を最早や持続できない微小立方体の辺長と考えるとき，l_dの小さなことは$k_d=l_d{}^{-1}$が運動の大きな振動数を与え，そこであるいはそれ以上で運動が無秩序になってしまうことを意味する．以上が先の発想である．流れの記述を拘束する振動の個数は

$$k_1{}^2+k_2{}^2+k_3{}^2\leqq k_d{}^3=l_d{}^{-3}$$

を満たす整数k_1,k_2,k_3であり，よって乱流の流れを得るために必要な自由度の数は次元数$n=2$または3に対して$N\sim l_d{}^{-n}$である．

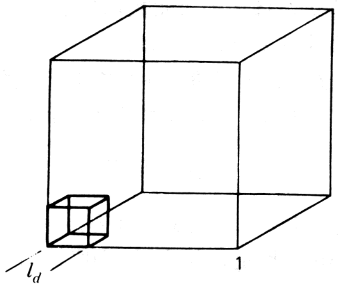


図 C.1.Kolmogorovの箱

更に，より高い振動で秩序正しい流れを構成することがより困難である徴候として，k_dの増加に伴ないPythagorasの関係を満たすことがますます困難になる事実があげられる．

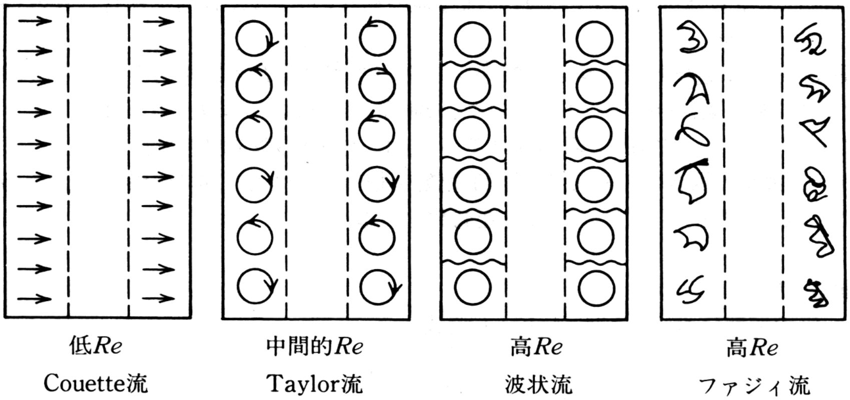
問題C．4

(*a*)　それ以下が渦構造を失うというKolmogorovの小さな臨界長l_dの予想から，流れが“乱流”になるのに必要な自由度の数が次元数$n=2$または3に対して$O((l_0/l_d)^n)$であることを，物理学に基づいて導け．ここで，l_0は流れ全体の物理学的スケール(例

えば，容器の直径）である．
(*b*)　最近，乱流流れの自由度の数が対応する普遍アトラクターのフラクタル次元にほぼ等しいことが厳密に示された．どうしてそうなのか？
(*c*)　問(*b*)の答のなかで，エネルギー散逸率の極限平均 $\varepsilon(x,t)=\nu|\mathrm{grad}\ u(x,t)|^2$ が $\nu\lambda_m{}^M$ とかかれたのはなぜか？

上に，すべての流れが集まるアトラクター集合について述べた．その種の集合の理論に取り組む心算はないが，ここでは，非線形２階常微分方程式の相平面解析に見られるPoincaré極限閉軌道の一般化として，それを簡単に述べよう．その一例は節1.9.8で与えられたVan der Pol極限閉軌道である．２次元では，２階方程式のすべての可能な極限集合の理論は良好な構造をもつ．３次元での問題は，追加自由度によってその様な最終の単純極限集合の構造が除かれてしまうことである．

古典的な流体動力学の物理学的実験で二本の長い同心円筒の間の流れのTaylor問題がある．その実験では外側円筒は固定され，内側円筒は制御された一定角速度ωで回転する．物理学的に，小さなωの間では定常Couette流れがみられ，次のω区間で水平逆回転Taylor渦心の帯が定常的な回転流れの上に重なり，次にTaylor渦心の水平帯が発達する区間で，波状あるいはらせん状に上昇する流れ模様がみられる．Taylor渦心の出現は節1.8で述べた様に，基礎Couette流れからの第一次分岐を表す．高Reynolds数での波状解は，Hopf分岐と呼ばれる第二次分岐であるように見え，それは定常流れの周期的流れへの転位を意味する．



図C.2　Taylorの円筒

問題C．5
(*a*)　Hopf分岐の存在はNavier-Stokes方程式に対して，数学的に解析的に証明されているか？
(*b*)　Hopf分岐はNavier-Stokes方程式に対して数学的に数値的に示されているか？
(*c*)　常微分方程式に対するHopf分岐の例を与えよ．

波状模様に対する可能なHopf分岐(すなわち，高Reynolds数)のうしろで，実験における流れは見かけ上カオス的になる．これを数学的に理解するのに二つの見方がある．古典的立場は，より高位の分岐の無限列を介して最終的なカオス状態に急激に移行するとみる．現代的なものは，波状模様のすぐうしろにカオス状態を予想する．

問題C.6

(a)　カオス状態は二，三個の分岐のすぐ後で，どうして現われるのか？

(b)　非常にカオス的な軌道を生じる微分方程式系の例を与えよ．

(c)　現実の乱流を生ずるためには，3次元が必要か？

C.3　電算流体動力学

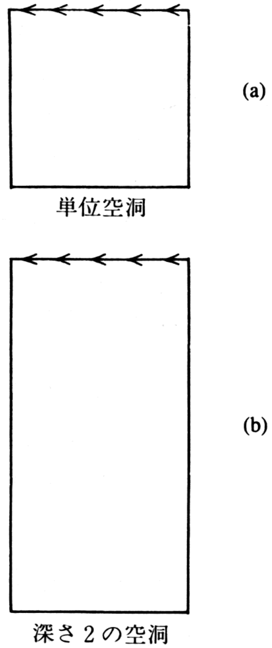
適当な数の自由度の流れに対して,Navier-Stokes方程式を数値的に取扱う電算的方法は，流体動力学を理解する上で大幅に増している．それは急激に拡がっている分野であり，ある意味でそれ自体流体動力学の実体になっている．ここでは例を一つ——駆動空洞の中での流れ——だけ与えよう．この流れは単純な形状の中に剥離,分岐，渦の動力学に十分豊富な内容をもち，表面に沿う流れやかどの様な幾何学的不連続の近くでの流れの層状模様および循環模様を理解するための基本的モデルになる．十分な理解には程遠いけれども，見出される流体の特徴は，海洋障碍物を越える流れや空力構造物の上の流れの様な他の形状のものに,容易に移行される(例えば，図C.5参照)．

簡単のため,縦横比A＝深さ／幅が1と2の空洞の場合のみを考える.いずれの場合も,滑り無し条件$(u,v)=(0,0)$がすべての側面と底面に課せられ,頂面は$(u,v)=(-1,0)$でもって左方へ定常的に駆動されている.すべての特徴を解き明かすことはできないが，2次元の場合のみを考え，原始変数の速度(u,v)と圧力pの両者，および，流れ関数と渦度変数(ψ，ω)についても定式化を行なう．

問題C.7

(a)　原始変数における定常Stokes方程式

$$
\begin{cases}
\Omega\text{内で} & \begin{cases} -\Delta u = -\nabla p, \\ \nabla\cdot u = 0, \end{cases} \\
\partial\Omega\text{上} & \begin{cases} \text{側面と底面で} \quad u=(0,0) \\ \text{頂面で} \quad u=(-1,0) \end{cases}
\end{cases}
$$



図C.3 空洞流れ問題 (a)$A=1$ (b)$A=2$

から，空洞流れ問題に対する流れ関数－渦度の定式化

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \begin{cases} \Delta\psi=-\omega, \\ \Delta\omega=0, \end{cases} \\ \partial\Omega\text{上} & \begin{cases} \text{側面と底面で} \quad \partial\psi/\partial n=0, \\ \text{頂面で} \quad \partial\psi/\partial n=-1, \\ \text{すべての表面で} \quad \psi=0 \end{cases} \end{cases}$$

を導け．ここで，$(u,v)=(\psi_y,-\psi_x)$は流れ関数，ωは渦度で$\omega=v_x-u_y$.

(b) 離散的差分Poissonソルバを用いて流れ関数と渦度について解くとき，渦度に対する境界条件が必要になる．

$$\begin{cases} \omega(x,0)=-2\psi(x,\Delta y)/(\Delta y)^2, \\ \omega(0,y)=-2\psi(\Delta x,y)/(\Delta x)^2, \\ \omega(1,y)=-2\psi(1-\Delta x,y)/(\Delta x)^2, \\ \omega(x,1)=-2\psi(x,1-\Delta y)/(\Delta y)^2+2/\Delta y \end{cases}$$

を用いて，$O(h)$の精密であることを示せ．ここで，$\Delta x=\Delta y=h$は格子点間隔．
(*c*)　大きな(例えば, 256×256の)格子に対して,効率をよくするために,素直なGauss消去法でなく逐次行列ソルバを用いよう．それらはGauss-Seidel法，Jacobi法，SOR法，共役勾配法，多重格子法の名称のもとで行なわれる．それらを用いる際，過度の計算で，それらが収束することをどの様にして主張することができるか？

非常に古く，Rayleigh卿*)はかどにおける非圧縮性粘性流れの定常運動を解析し，次の様に述べた．

この様に表された一般的問題は大変困難なものの一つであり，ここで試みようとするすべては一，二の特殊な場合の考察である．どんな解が，r(かどの点からの動径ベクトル)の関数としてr^mに比例するψとなることができるかを先ず尋ねよう．かどの近くの流れ領域Ωにおいて，遅い運動の(Stokes)線形化された方程式

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta^2\psi=0, \\ \partial\Omega\text{上} & \psi=\partial\phi/\partial n=0 \end{cases}$$

を仮定して，Rayleighは境界条件を

$$\psi(r,\theta)=r^m f(\theta)$$

の形の仮定された流れ関数にあてはめることができなかった．なぜなら，彼は試行関数を$m=n\pi/\alpha$に制限してしまったからである．ここでαはかどの挟角．90°のかどの場合，これはmが整数であることを要請する．

読者は直ちに,ψの分離された試行形式を候補相似解のそれとして認めなければならない†)．これは,平板問題でそうであった様に,変数分離法の試みを困難にするStokes作用素の4階の性質である(休止第2回および節1.7.2の問題1を見よ)．

その後の研究で，非整数λに対する形式

$$\psi(r,\theta)=r^\lambda f(\theta)$$

の相似解が試みられ,かどの挟角 $\alpha<146.3^\circ$ でかどに近づく無限列の渦心が存在するかなり著しい事実が見出された．そのうちの二つ三つは最近実験的に確かめられ

*)　Lord Rayleigh, "Hydrodynamical notes", *Phil. Mag* [vi], **21** (1911), 177-195. 完全な歴史および最近の結果については,次を見よ. K.E.Gustafson, "Vortex separation and fine structure dynamics", *Applied Numer. Math.*, **3** (1987), 167-182.

†)　自己相似解を推量することはそれらを見出すのに実用上重要な方法であって，それらの存在は依存する汎関数関係(η, g(η))を陽的に与えるという利点がある．

た*). それらの強度が一つずれるたびに$O(10^{-4})$も落ちるので，それを見出すことは微妙な仕事である.

適応反復緩和法が大きな能力を発揮することを示す例で，これらのかどの渦の二十個以上を最近見出した†). ここでは，初めの十個の流れ関数の強度ψ_iと挾角45°のかどの二等分線に沿って測られた流れ関数の相対極値間の零点z_iの位置を示す. z_1は空洞における第一主中心渦心ψ_1と第一かど渦心ψ_2の間の零点である.

局所極大流れ関数強度	挾角の二等分線上で測定された流れ関数の零点
1.0006×10^{-1}	6.97×10^{-2}
-2.232×10^{-6}	4.205×10^{-3}
6.155×10^{-11}	2.534×10^{-4}
-1.703×10^{-15}	1.535×10^{-5}
4.71×10^{-20}	9.247×10^{-7}
-1.30×10^{-24}	5.602×10^{-8}
3.59×10^{-29}	3.370×10^{-9}
-9.93×10^{-34}	2.040×10^{-10}
2.75×10^{-38}	1.236×10^{-11}
-7.59×10^{-43}	7.421×10^{-13}

問題C.8

(*a*)　Rayleighの試みた試行解が4階常微分方程式

$$\frac{d^4\psi}{d\theta^4}+[(m-2)^2+m^2]\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+(m-2)^2m^2\psi=0$$

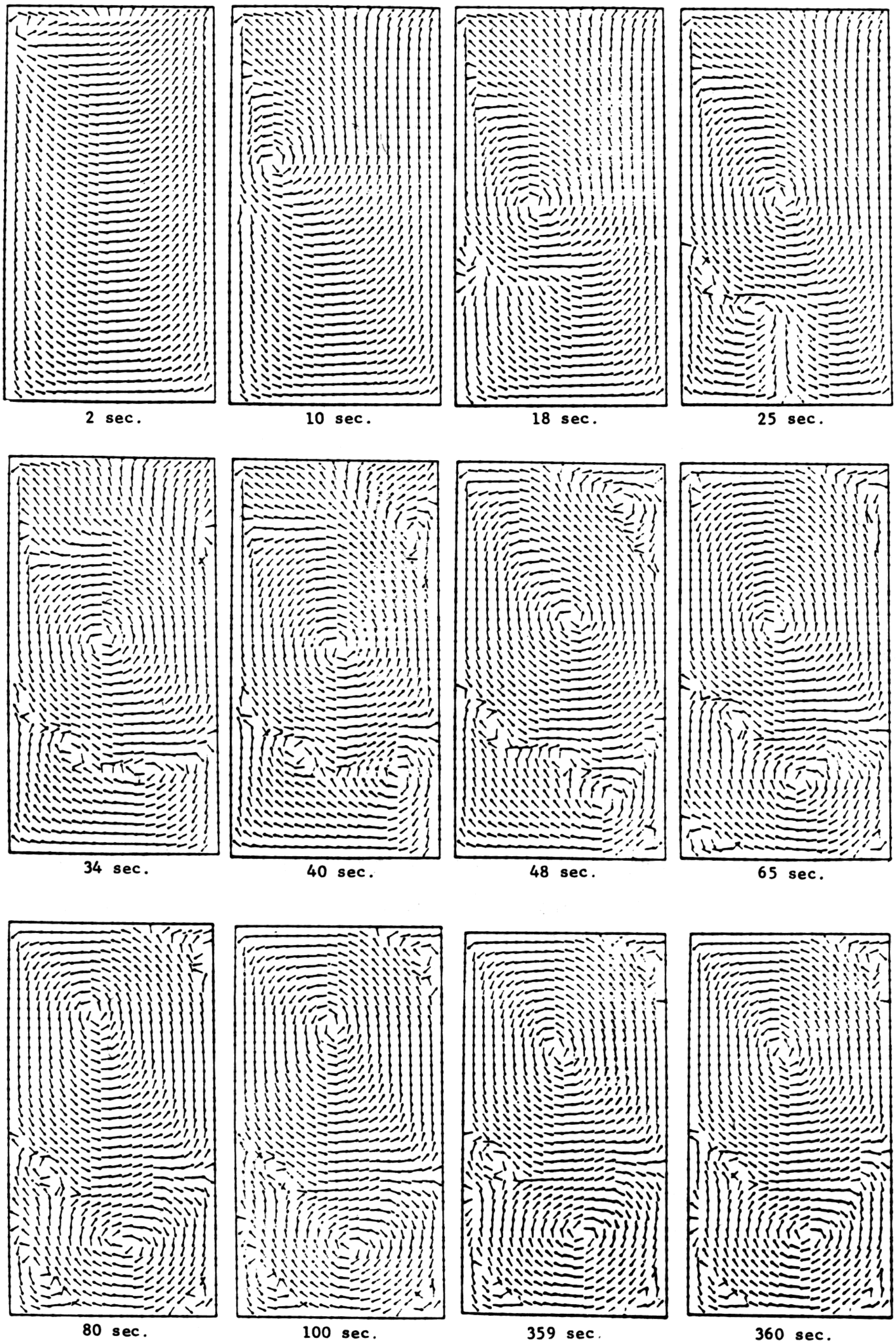
になること，および角度$\alpha=\pi$または2πのときのみ実数解が求まることを示せ.

(*b*)　もっと一般的な相似試行解$\psi(r,\theta)=r^\lambda(A\cos\lambda\theta+C\cos(\lambda-2)\theta)$から，かどに集まる渦心の無限列の存在が決められることを示せ.

(*c*)　空洞中のStokes流れが一意的に決定されることを示せ(必要ではないが，可能性のある関連した興味あるヒント:第1章の休止第2回と節1.7.2問題1で議論した平板方程式を参照せよ).

*)　S.Taneda, "Visualization of separating Stokes flow," *J.Phys.Soc.Japan*, **46** (1979), 1935-1942.

†)　K.E.Gustafson and R.Leben, "Multigrid calculation of subvortices," *Appl.Math.Comput.*, **19**(1986), 89-102; "Vortex subdomains", *Proc.1st Internat.Symposium on Domain Decomposition of Partial Differential Equations* (SIAM, Philadelphia, 1988), pp370-380. これらの強度や位置は理論から予測されたものに非常に近い.


2 sec.
10 sec.
18 sec.
25 sec.
34 sec.
40 sec.
48 sec.
65 sec.
80 sec.
100 sec.
359 sec.
360 sec.

図C.4　空洞渦動力学

完全な非定常Navier-Stokes流れ方程式の原始変数定式化にもどって，千鳥状網目スキームで360,000個の時間ステップ($\Delta t=0.001$)をとると，深さ2の空洞において比較的高いReynolds数$Re=10{,}000$での流れの発達に関する動力学全体を知ることができた[*]．図C.4参照．同図では，速度が流れ図において正規化された．見てわかる様に，過渡的な壁から離れる渦，剝離点近くの再循環構造，壁面と衝突後の渦心の分裂，層内のバースト，多重渦心の分裂－融合の列，最終的な持続性(Hopf的)波状構造が認められる．これらの模様は，閉域内の流れに対する規則に整合したある種の渦心パリティへのシミュレートした流体の完全な執着と関係するように見える[†]．

空洞模型は渦巻き構造を示すいろいろな他の興味ある領域の研究に対して基礎を与える．写像の技法(格子発生法)によって，空洞多重格子スキームは，くさび形，多くのかどをもつ領域，翼形上の空気の流れに採用されている[‡]．図C.5に見られる様に，数値シミュレーション(右側)と物理学的な流れの可視化[‡](左側)との一致は顕著である[§]．

問題C．9

(*a*) 電算的に上で見出された流れの特徴に対し，解析的に，数学的証明はまだなされていない．それはそうとして，完全なNavier-Stokes流れの最終的な状態に対し，無限列のかどの渦の存在を議論せよ．

(*b*) “＋”を反時計回りに回転する渦心に，“－”を時計回りの渦心に指定し，一旦生成された後には後向きの状態が起り得ないことを主張する**パリティ規則**を調べよ．

(*c*) すべてこの様な大型計算に関わる難点は線形ソルバである．数多くのソルバが問題C.7(*c*)で注目された．それらについて調べよ．逐次計算の相対的な速さの強みが，いかにうまく，並列計算の来たるべき日まで持続しつづけるのだろうか？

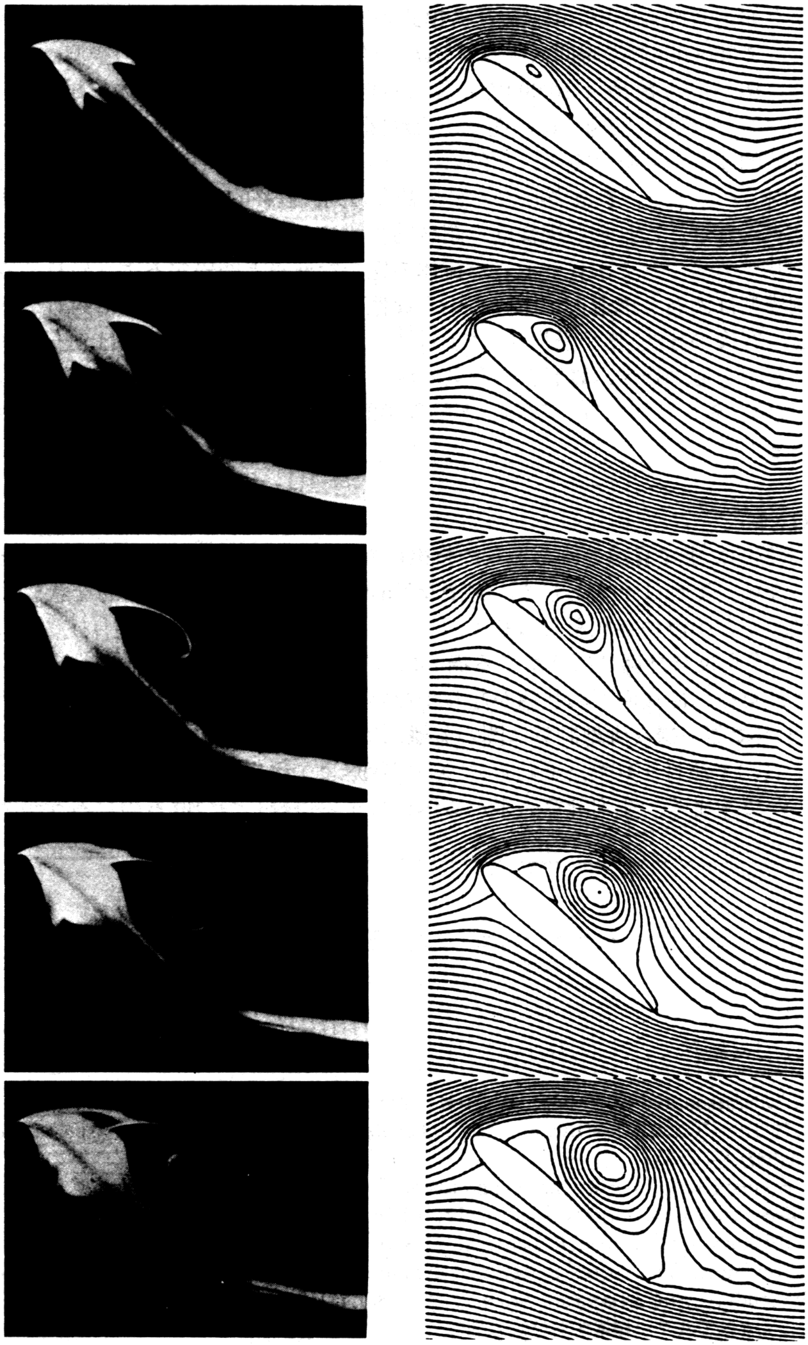
*) K. Gustafson and K. Halasi, “Vortex dynamics of cavity flows,” *J. Comput. Phys.* **64** (1986), 279-319; “Cavity flow dynamics at higher Reynolds number and higher aspect ratio,” *ibid* **70**(1987), 271-283.

†) K.E. Gustafson, “Vortex fission and fusion,” *Proc. Fourth Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, Cornell Univ., Ithaca, N.Y., May, 1986.

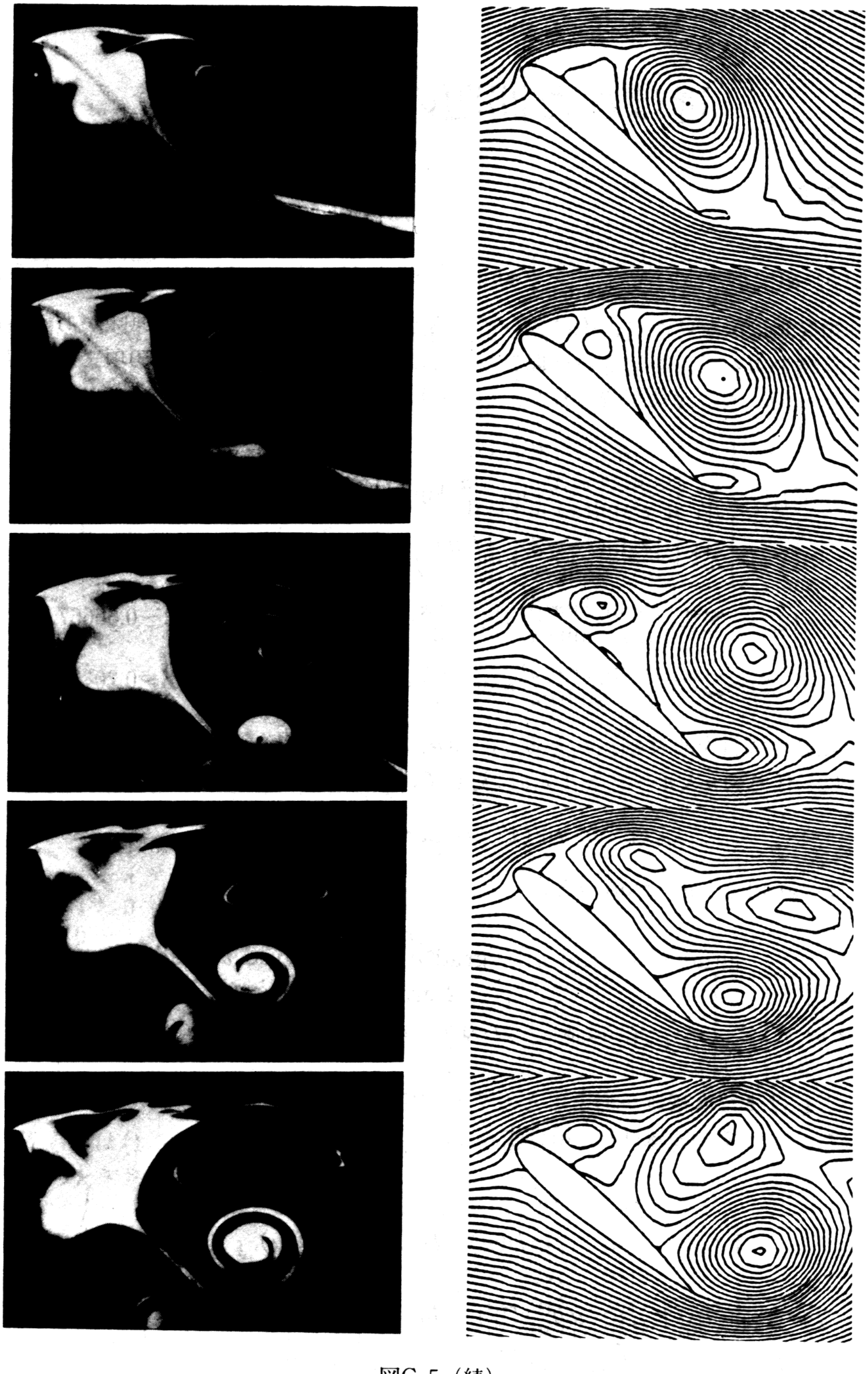
‡) C.Y. Chow, K. Gustafson, R. Leben, to appear.

⁑) P. Freymuth, “The vortex patterns of dynamic separation : a parametric and comparative study,” *Prog. Aerospace Science*, **22** (1985), 161-208.

§) そしてすべて我々が探索する終焉の地は
我々の出発した所に到達するであろうし，
そして初めてその場所を知る・・・(T.S. Eliot)



図C.5　　翼形上を通過する流れの実験結果（左）と計算結果（右）



図C.5（続）

選ばれた問題の解とヒント

節　2.6

1．(*b*) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18\sin(2n\pi/3)}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\sinh(n\pi(1-y/3))$.更に，このむしろ粗雑な差分法がいかに上手に働いているかを見ることは，かなり興味がある．電算機を用いて，解によい近似を与えることができる．例えば，50項までの和をとって，次の比較が得られた．

	$u(x_i,y_j)$	$s_{50}(x_i,y_j)$	差分法
$u(1,1)=$	$\sum_{n=1}^{50}\frac{18\sin(2n\pi/3)}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sinh\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$	$=0.43051$	$\sim 0.45833,$
$u(1,2)=$	$\sum_{n=1}^{50}\frac{18\sin(2n\pi/3)}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{3}\right)$	$=0.14285$	$\sim 0.16667,$
$u(2,1)=$	$\sum_{n=1}^{50}\frac{18\sin(2n\pi/3)}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\sinh\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$	$=0.51732$	$\sim 0.66667,$
$u(2,2)=$	$\sum_{n=1}^{50}\frac{18\sin(2n\pi/3)}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{3}\right)$	$=0.15310$	$\sim 0.20833.$

差分の網目を少々細かくとると，非常によい解が得られる．

2．(*a*) 任意のn次元ベクトルx,yに対して，

$$x\cdot x=y\cdot y+(x-y)\cdot(x-y)+2x\cdot y-2y\cdot y.$$

$x=\text{grad } v$，$y=\text{grad } u$とおくと，

$$\begin{aligned}|\text{grad } v|^2&=|\text{grad } u|^2+|\text{grad}(v-u)|^2+2\text{ grad } v\cdot\text{grad } u\\&\qquad-2\text{ grad } u\cdot\text{grad } u\\&=|\text{grad } u|^2+|\text{grad}(v-u)|^2+2\text{ grad } u\cdot\text{grad}(v-u)\end{aligned}$$

これはまた直接確かめることもでき，実際，1次元の等式は節1.5.3で用いられた．よって，領域Ω上で積分すると，

$$\begin{aligned}D(v)&=D(u)+D(v-u)+2D(u,v-u)\\&=D(u)+D(v-u)\geqq D(u).\end{aligned}$$

なぜなら，$\partial\Omega$上で$v=u$かつΩ内で$\Delta u=0$であるから，Green第1等式から

$$D(u,v-u)=\oint_{\partial\Omega}(v-u)\frac{\partial u}{\partial n}-\int_{\Omega}(v-u)\Delta u=0,$$

3.
$$R(u)-R(v)=2\oint_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}-\int_{\Omega}|\mathrm{grad}\ u|^2-2\oint_{\partial\Omega}f\frac{\partial v}{\partial n}+\int_{\Omega}|\mathrm{grad}\ v|^2$$
$$=2D(u)-D(u)-2D(u,v)+D(v)$$
$$=D(u-v).$$

$R(u)=D(u)$に注意しよう．従って，Dirichletノルムにおいて下から近似される．

休止 第4回

1.
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(.75,\ .75) \\ u(.75,\ 1.5) \\ u(.75,\ 2.25) \\ u(1.5,\ .75) \\ u(1.5,\ 1.5) \\ u(1.5,\ 2.25) \\ u(2.25,\ .75) \\ u(2.25,\ 1.5) \\ u(2.25,\ 2.75) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .75 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から解は(.416,.209,.126,.707,.295,.294,.618,.263,.139)．
この格子はもとの粗い3×3格子を精密化したものでなく，よって，比較してよくないことに注意しよう．また，データfを線形補間するとき，この格子は，$x=2$でfの最大値をとることにも失敗している．

2.
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\pi/3,\ \pi/3) \\ u(\pi/3,\ 2\pi/3) \\ u(2\pi/3,\ \pi/3) \\ u(2\pi/3,\ 2\pi/3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \pi/3 + (\pi/3)(\pi - \pi/3) \\ 2\pi/3 + 0 \\ 0 + (2\pi/3)(\pi - 2\pi/3) \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.24 \\ 2.09 \\ 2.19 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から解は(1.302,0.471,0.996,0.492)．この問題はプログラム電卓で処理できる程度の大きさである．例えば，Hewlett-Packard 41Cで

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} .2917 & .0833 & .0833 & .0417 \\ .0833 & .2917 & .0417 & .0833 \\ .0833 & .0417 & .2917 & .0833 \\ .0417 & .0833 & .0833 & .2917 \end{bmatrix}.$$

これらの数は，粗い格子上で与えたデータに対しても確かに十分である．

3．$AU=b$. ここでAは問(1)の9×9行列，$b=(2.636, 1.571, 2.356, 2.467, 0, 0, 1.850, 0, 0)$から，問(2)の様に並んでいる点で，

$$u=(1.32,\ 1.21,\ 1.03,\ 1.42,\ 0.93,\ 0.56,\ 0.95,\ 0.54,\ 0.27).$$

4．前に(節2.1問題2(a)，解答参照)求めた変数分離解から，10項まで加えて，

$$u=(1.29,\ 1.21,\ 1.02,\ 1.39,\ 0.90,\ 0.52,\ 0.92,\ 0.51,\ 025).$$

5．グラフィックス出力および同じ境界条件をもつ極小曲面問題の解との比較に対しては，付録Bの図B.6を見よ．

6．$H_0^1[0,1]$がtest関数$C_0^\infty[0,1]$の完備化である事実を用いよ．$u_m\in C_0^\infty$がH^1で，上の例と同様，$u\in H^1$に収束するものとし，$w=u'$をuの弱導関数と呼ぼう．$\phi\in C_0^\infty(0,1)$を任意のtest関数とし，$[a,b]$を$[0,1]$内の区間とする．このとき，Schwarz不等式によって

$$\int_a^b \phi'(u_m-u)\,dx \leqq \|u_m-u\|_2\|\phi'\|_2\to 0,$$
$$\int_a^b \phi(u'_m-w)\,dx \leqq \|u'_m-w\|_2\|\phi\|_2 \longrightarrow 0.$$

よって

$$\phi u_m|_a^b=\int_a^b(\phi u_m)'=\int_a^b(\phi' u_m+u'_m\phi)-\int_a^b(\phi' u+w\phi)\to 0.$$

$a=0, b=x$とおくと，すべてのxに対して

$$\lim_{m\to\infty}\phi(x)u_m(x)=\int_0^x(\phi'(s)u(s)+w(s)\phi(s))\,ds.$$

この極限を$h^\phi(x)$とおくと，(Lebesgue)微積分学の基本定理から，h^ϕは絶対連続である．点別にかつL^2において，$\phi(x)u_m(x)\to h^\phi(x)$であるから，殆んど致る所で$\phi(x)u(x)=h^\phi(x)$. 従って，$\phi$を滑らかな特性関数(節2.9.3参照)にとると，$u$が絶対連続であると結論される．

7．

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 &, \quad 1/n\leqq x\leqq 1,\\ \sin\dfrac{n\pi x}{2} &, \ -1/n\leqq x\leqq 1/n,\\ -1 &, \quad -1\leqq x\leqq -1/n\end{cases}$$

とおく．f'_nが連続，よって各f_nが$C^1(-1,1)$に属することを確かめよう．それらの

不定積分は

$$F_n(x)=\begin{cases} x-1, & 1/n\leqq x\leqq 1,\\ \dfrac{1}{n}-1-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}, & -1/n\leqq x\leqq 1/n,\\ -1-x, & -1\leqq x\leqq -1/n \end{cases}$$

で，これはH^1ノルムで次に収束する．

$$F(x)=\begin{cases} x-1 \quad, & 0\leqq x\leqq 1,\\ -1-x, & -1\leqq x\leqq 0. \end{cases}$$

これは$x=0$でその導関数の不連続性のため$C^1(-1,1)$には属さない．

8．S_Nによって部分和$\Sigma_1^N n^{-1}(w,\phi_n)\phi_n$を表すと，$x$で一様に$|S_N(x)-S_M(x)|\to 0$を示すことで十分である．これはSchwarz不等式とBessel不等式から

$$\begin{aligned}|S_N(x)-S_M(x)|&\leqq\sum_{N+1}^{M}\frac{1}{n}|(w,\phi_n)|(2/\pi)^{1/2}\\ &\leqq(2/\pi)^{1/2}\left(\sum_{N+1}^{M}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{N+1}^{M}|(w,\phi_n)|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

によってわかる．大雑把にいえば，wはuの弱導関数として，与えられた重み付きFourier級数は関数を連続化する積分を演じると解釈される．

9．(*a*)　例えば$\phi=1$, x, x^2, x^3, ・・・ととり，全区間$\Omega=(0,1)$に非常に近いコンパクト台に，軟化によって切りとると，条件$\int_0^1 u\phi''=0$によって，uが恐らく１とxを除いてそれらのすべてに直交することが要求される．

(*b*)　すべての導関数が存在し，$x=0$で(l'Hospitalの規則によって)連続であるが，そのTaylor級数は恒等的に０である．

(*c*)　これは問(*b*)からわかる．これらは軟化核として用いたとき重要な鐘形カットオフ関数である．節2.9.3参照．

節　2.7.1

1．(*b*)　例えば，$L^2(\Omega)$に留めるために，$|x|\to\infty$のとき$u\to 0$を課することはもっともなことである．この事は今，$|x|=1$で$\partial u/\partial u=0$なる条件すなわちNeumann問題に対する一意性を与える．しかし問題は現に混合Neumann-Dirichlet問題であった．

3．(*d*)　一般にそうでない．

節　2.7.2

1．(*a*)　L^{-1}は$L^2(0,\pi)$への１対１であるが，上への写像でない．

(*c*)　ヒント：定数変化法の公式を参照せよ．

節　2.7.3

2．(a)　合成積の定理は(i)Fourier変換のユニタリ性，すなわち特に，角度保存からと，(ii)合成積$f*h=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)h(y)dy$が内積であることを見ることによってわかる．$\widehat{f*h}=\hat{f}\hat{h}$を示すため，代りに，$f*h=\widehat{\hat{f}\hat{h}}^{-1}$を示す．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)h(y)dy=\langle f(x-y),\bar{h}(y)\rangle=\langle \hat{f}(x-y),\overline{\hat{h}(y)}\rangle$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\langle e^{ikx}\hat{f}(-k),\bar{\hat{h}}(-k)\rangle$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\hat{f}(k)\hat{h}(k)dkz$$

節　2.8

1．(a)　$G_0(P,Q)=r^{-1}$ $(r=|P-Q|)$のときでも，積分素が$r^2d\omega$であった．ここで，ωは立体角，節1.6とGreen第３等式を見よ．

(c)進めてもよい一つの方法は$\varepsilon>0$に対するHelmholtz方程式$\Delta u+(\lambda+i\varepsilon)u_\varepsilon=f$を考えることである．この方程式の解は

$$u_\varepsilon(P)=\int_{R^3}\frac{e^{ia_\varepsilon r}}{4\pi r}\cdot e^{-ib_\varepsilon r}f(\Omega)dV_Q$$

で，∞でuが十分に減衰するとの性質をもつ．ここで，a_εとb_εは$\sqrt{\lambda+i\varepsilon}$から導かれるもので，具体的には，$a_\varepsilon=2^{-1/2}((\lambda^2+\varepsilon^2)^{1/2}+\lambda^2)^{1/2}$，$b_\varepsilon=2^{-1/2}((\lambda^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\lambda^2)^{1/2}$．このとき，適当な$f$に対して，$\varepsilon\downarrow 0$のとき$u_\varepsilon\to u$を示せ．

2．(a)　小さなxと大きなxを考えると，何れの場合にも，$W_+^*W_-\phi=\varphi$になる．

問題2.9.1

(a)　肝要なことは次の点にある．変数分離解は，解uが$L^2(0,\pi)^*\otimes L^2(0,\pi)^*$で表現されるテンソルの対角成分である様なやり方で，偏微分方程式をテンソル演算することに対応する．まず，Ω内で$-\Delta u=F$なるPoisson問題に対して，テンソル演算の仕組みをかき下ろすことは恐らく容易であろう．

問題2.9.2

(a)　証明の方法はここでの一連の問題のあとで直接述べられる．

(b)　節1.7.1問題３により，ある$b<1$に対して$\|Vu\|\leqq a\|u\|+b\|H_0u\|$．この不等式から，$(1-b)\|H_0u\|\leqq\|(H_0+V)u\|+a\|u\|$．さらに，$H_0+V$が閉作用素であることは，$H_0$の閉性と閉作用素の定義によってわかる．

問題2.9.3

(d)　$\delta_\varepsilon(x)$なる関数が存在し，かつC_0^∞級“カットオフ”をもつことは，偏微分作用素の抽象的理論においてかなり重要であり，さらに擬微分作用素の現代的理論ではなおさらのことである(問題2.9.9演習6参照).

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(1-x^2)^{-1}}, & |x|<1, \\ 0, & |x|\geqq 1 \end{cases}$$

を考えよう．明らかにfはコンパクト台をもち，恐らく$x=\pm1$を除いてC_0^∞である．$x=1$の場合を考えよう．明らかに右辺の導関数はすべて存在し，0である．左辺の導関数もまたそこで0であることを示そう．左辺の高階の導関数の消えることは同様にして示される．左辺の差分商は$h\uparrow0$のとき不定である．すなわち

$$\frac{\Delta f}{\Delta h}=\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\frac{e^{-(2h-h^2)^{-1}}}{h}\rightarrow\frac{0}{0}.$$

しかし，l'Hospitalの規則を用いて

$$\frac{\Delta f}{\Delta h}\rightarrow\frac{h^{-1}}{e^{1/(2h-h^2)}}\rightarrow\frac{-h^{-2}}{e^{1/(2h-h^2)}[(2h-2)/(2h-h^2)^2]}$$
$$=\frac{(2-h)^2/(2h-2)}{e^{1/(2h-h^2)}}\rightarrow\frac{-2}{\infty}=0.$$

問題2.9.4

(c)　正則の場合, Sturm-Liouville方程式の解は有界区間で連続, よって2乗可積分である.

問題2.9.5

(a)　Aの線形性によって，Aが有界であるのは，Aが0で連続のときで，そのときに限られることを示すことで十分である．距離空間における連続関数の$\varepsilon-\delta$論法から, Aが0で連続であるのは, 各$\varepsilon>0$に対して$\delta=\delta(\varepsilon)>0$が存在して$A(B_\delta)\subset B_\varepsilon$とできることである．ここで$B_\gamma$は球$\|x\|\leqq\gamma$を示す．

(i)Aを有界としよう．すなわち，$\|x\|\leqq1$に対して$\|Ax\|\leqq M$．次に，$\delta=\varepsilon/M$にとると，$\|x\|<\delta$に対して，$\|Ax\|\leqq(\varepsilon/M)\|A(M/\varepsilon)x\|\leqq\varepsilon$.

(ii)Aを連続とする．このとき，$\varepsilon=1$にとると，ある$\delta>0$に対して，$\|x\|\leqq\delta$のとき$\|Ax\|\leqq1$．これから，$\|x\|\leqq1$に対して，$\|Ax\|\leqq\delta^{-1}$.

問題2.9.6(1)

(a)　これは休止第2回で示したFriedrichs-Poincaré補題の特別の場合である．

問題2.9.6(2)

(a)　行列形式で，微分方程式の系は次となる．

$$\underbrace{\begin{bmatrix} du(x_1,\ t)/dt \\ du(x_2,\ t)/dt \\ \vdots \\ du(x_{N-1},\ t)/dt \end{bmatrix}}_{\dfrac{dY}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \cdots & \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u(x_1,\ t) \\ u(x_2,\ t) \\ \vdots \\ u(x_{N-1},\ t) \end{bmatrix}}_{Y}$$

また，初期条件は

$$Y(0)=C=[f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_{N-1})].$$

(b)　$du(x_i,t)/dt$を前進差分$(u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j))/k$によって近似せよ．今の場合，これは前進Eulerスキームとなる．付録Bを見よ．

問題2.9.6(3)

(a)　ヒント：Green等式と“エネルギー”法を用いよ．

(b)　例えば，

$$\frac{u_{i,j}^{\gamma+1/2}-u_{i,j}^{\gamma}}{\frac{1}{2}k_\gamma}=\frac{1}{h_x^2}[A_{i+1/2,j}^{n}(u_{u+1,j}^{\gamma+1/2}-u_{i,j}^{\gamma+1/2})-A_{i-1/2,j}^{n}(u_{i,j}^{\gamma+1/2}-u_{i-1,j}^{\gamma+1/2})]$$

$$+\frac{1}{h_y^2}[A_{i,j+1/2}^{n}(u_{i,j+1}^{\gamma}-u_{i,j}^{\gamma})-A_{i,j-1/2}^{n}(u_{i,j}^{\gamma}-u_{i,j-1}^{\gamma})]$$

(c)　ヒント：第3章，付録A，付録Bを見よ．

問題2.9.7(1)

(b)　(ii)　$z=re^{i\theta}$とおけ．Ωは$-\pi/3<\theta<\pi/3$，$r-4r^{1/2}\cos(\theta/2)+3<0$ によって定められたレンズ状領域である．

(c)　(ii)　少々長い計算ののち，次を得る．

$$u(r,\theta)=-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G(r,\theta,\rho,\psi)}{\partial n}u(\rho,\psi)ds$$
$$=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{[4r^{1/2}\cos(\theta/2)-r-3]\rho^{1/2}}{4\pi[r+\rho-2r^{1/2}\rho^{1/2}\cos((\theta-\psi)/2)](2\cos\psi-1)^{1/2}}u(\rho,\psi)d\psi.$$

ここで，$Q=(\rho,\ \psi)$が$\partial\Omega$の両方の部分をとるので，積分値は二回評価されることが理解される．(i)の部分は容易であるから，読者にまかせる．

問題2.9.7(2)

(c)　ヒント：節2.8問題1(c)の答を参照せよ．

問題2.9.7(3)

(b)　これは次を示すこと(Stokesの方法またはDuhamelの方法)に帰着される．

$$\begin{cases}\Box u=0\\ u(0)=0\\ u_t(0)=f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Box v=0\\ v(0)=f\\ v_t(0)=0.\end{cases}$$

ある連続性仮定(例えば，0でu_{tt}が連続)によって，$\Box v=0$かつ$v(0)=f$が示される．このとき，$v_t(0)=0$を示す手続は幾つかあり，そのうちの一つは発散定理の適用である．

問題2.9.8

(a)　問題B-9を見よ．

(b)　流れ関数ψと変数変換$\ln w=-\phi/2\nu$は，(Hopf-Cole)変換$u=-2\nu w_x/w$で結びつけられる．これによって，$u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0$は$w_t-\nu w_{xx}=0$に移され，よって非線形と線形の初期値問題は次の様に関係づけられる．

$$\begin{cases}u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0, & t>0\\ u(0)=f(x)\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}w_t-\nu w_{xx}=0, & t>0,\\ w(0)=\exp(-(2\nu)^{-1}\int_0^x f(s)ds).\end{cases}$$

いろいろなwとfをこの関係に含ませることができる．

(e)　問題B-9(c)を見よ．

問題2.9.9

1．(*a*)　$u(x,y,t)=4\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)^2(2m+1)^2}$

$$\times\sin(2n+1)x\ \sin(2m+1)y\ \cos(m^2+n^2)^{1/2}t.$$

(*b*)　$u(x,y,t)=4\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^2}\right)\left(\frac{(-1)^{m+1}}{m}-\frac{2(1-(-1)^m)}{m^3\pi^2}\right)$

$$\times\sin nx\ \sin my\ \cos(m^2+n^2)^{1/2}t.$$

(*d*)　$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}e^{-k(m^2+n^2)t}\sin nx\ \sin my,$

$$c_{nm}=4\pi^{-2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(s,\tau)\sin ns\ \sin n\tau\ ds\ d\tau.$$

2．(*c*)　存在せず.

(*d*)　自己共役.

(*f*)　ヒント：$u=c_1e^{i\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-i\sqrt{\lambda}x}$は$\int_0^\infty e^{-2\beta x}<\infty$のとき，2乗可積分. ただし，$\sqrt{\lambda}=\alpha+i\beta$.

3．(*b*)　d'Alembertの公式.

(*c*)　$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}((u_t)^2+(u_x)^2)dx,\quad t\geqq 0.$

(*d*)　ヒント：問題2.9.7(3)を見よ.

7．(*b*)　方程式 $\tan\lambda^{1/2}R_n=\lambda^{1/2}R_n\ (n=1,2,3,\cdots)$を満たす半径$R_n$のボール.

9．1　(*a*)は容易に変数分離法または直観的に解けて，解は$u(x,t)=1+e^{-t}\cos x$.
(*b*)は固有値λ_nに対する超越方程式

$$\tan\sqrt{-\lambda}\,\pi=-\sqrt{-\lambda}/2,\quad \cot\sqrt{-\lambda}\,\pi=\sqrt{-\lambda}/2$$

に導く. また，(*a*)の境界条件と初期条件が($\pm\pi$, 0)で両立するけれども，(*b*)ではそうでないことに注意.

9．2　Hermite方程式$-u''+x^2u=\lambda u$は変分的Rayleigh商$\lambda=\int u(-u''+x^2u)/\int u^2$をもち，よって

$$\min_l\int_{-l}^{l}(1-x^2/l^2)\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)(1-x^2/l^2)dx\Big/\int_{-l}^{l}(1-x^2/l^2)^2dx$$

$$=\min_l\int_{-l}^{l}\left(\frac{2}{l^2}+x^2-\frac{x^4}{l^2}-\frac{2x^3}{l^4}-\frac{x^4}{l^2}+\frac{x^6}{l^4}\right)dx\Big/\int_{-l}^{l}\left(1-\frac{2x^2}{l^2}+\frac{x^4}{l^4}\right)dx$$

$$=\min_l\left(\frac{2}{l}+\frac{l^3}{3}-\frac{2l^5}{5l^2}-\frac{2l^3}{3l^4}+\frac{l^7}{7l^4}\right)\Big/\left(l-\frac{2l^3}{3l^2}+\frac{l^5}{5l^4}\right)$$

$$=\min_l\frac{15}{8}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{1}{l^2}\right)+\frac{8}{105}(l^2)\right).$$

を得る．導関数を 0 に等置すると，$l^2=\sqrt{35/2}$，代入して$\lambda=(2/7)\sqrt{35/2}\approx 1.2$.真の値は$\lambda_1=1$であるから，よい近似とみられよう．

9．3　$S_N(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^N a_n r^n\cos n\theta+\sum_1^N b_n r^n\sin n\theta$.ただし

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

ここで境界条件$f(\theta)$が区分的に$C^1[-\pi,\ \pi]$かつ連続を仮定した．最大値原理によって

$$|S_M(r,\theta)-S_N(r,\theta)|\leqq\max_{-\pi\leqq\theta\leqq\pi}|S_M(1,\theta)-S_N(1,\theta)|.$$

Dini判定によって，$S_N(1,\theta)\xrightarrow{一様}f$であるから，$S_N(r,\theta)$はすべての$r\leqq 1$に対してその極限，$u(r,\theta)$，に一様に収束する．
項別微分法によって，まず，$c_n=na_nr^{n-1}\cos n\theta$を考える．このとき

$$|c_n|\leqq\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|d\theta r^{n-1}\leqq M_n.$$

ここで，すべての$r<1-\varepsilon$に対して$M_n=(n/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|d\theta(1-\varepsilon)^{n-1}$．比をとって，$M_{n+1}/M_n=((n+1)/n)(1-\varepsilon)$，よって$n\to\infty$のとき，$M_{n+1}/M_n\to 1-\varepsilon$．よって，比判定法により$\Sigma M_n<\infty$．また，$\Sigma nr^{n-1}a_n\cos\theta$は，任意の$\varepsilon>0$に対して，$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$，$0\leqq r\leqq 1-\varepsilon$で一様に収束する．同様に，$\Sigma nr^{n-1}b_n\sin n\theta$も一様に収束する．結局，$\Sigma_0^\infty nr^{n-1}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$は，任意の$r<1$に対して，$u_r(r,\theta)$に等しい．同じく，$u_{rr}(r,\ \theta)$，$u_\theta$，$u_{\theta\theta}$は$\Omega$において項別に微分したものに等しい．

9．4　節1.6.1と同様のP，Q，Ω_εによって，基本特異関数$-\ln r_{PQ}$は$Q\neq P$のとき調和であることが，まず確立される．これは最初に$P=(0,0)$とおいてわかる．このとき，$-\ln r=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$．これから，$(-\ln r)_{xx}=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$，$(-\ln r)_{yy}=(y^2-x^2)/(x^2+y^2)$．変数を変換し，連鎖規則を用いると，一般的な結果が得られる．

次に，領域Ω_εに対するGreen第 2 等式は次で与えられる．

$$\int_{\Omega}{}_\varepsilon u\Delta v-\int_{\Omega}{}_\varepsilon v\Delta u=\oint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}-\oint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}+\oint_{S\varepsilon}u\frac{\partial v}{\partial n}-\oint_{S\varepsilon}v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

vを$v=-(2\pi)^{-1}\ln r_{PQ}$にとって，１項ずつ考えよう．初項は$\int_{\Omega}{}_\varepsilon u\Delta v=0$,よって$\varepsilon\to 0$の極限で消える．第 2 項は，積分素$dA$が形式$dA=rdrd\theta$をもち，よって$-r_{PQ}\ln r_{PQ}$が$P$で有界ゆえ，正則でかつ$\varepsilon\to 0$のとき$u\in C^2(\Omega)$に対して収束する．第 3 項と第 4 項は$\varepsilon$に依らない．第 5 項は特に詳しく扱う必要がある．l'Hospitalの規則によって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial n_Q}&=\lim_{t\to 0}\frac{v_{P,Q+tn_q}-v_{P,Q}}{t}\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0}[\ln(r_{PQ})-\ln(r_{P.Q+tn_q})]\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(r_{PQ})-\ln(r_{PQ}-t)}{t}\\&=-\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\ln((r_{PQ}-t)/r_{PQ})}{t}\\&=-\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0}(r_{PQ}/r_{PQ}-t)(-1/r_{PQ})=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right).\end{aligned}$$

よって，第５項は

$$\oint_{S\varepsilon}u\frac{\partial v}{\partial n_Q}=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_{S\varepsilon}u\ \ ds=\frac{1}{2\pi\varepsilon}u(Q_\varepsilon)\cdot 2\pi\varepsilon=u(Q_\varepsilon).$$

ここで，Q_εの存在は，微積分学の平均値定理を，区間$[-\pi,\ \pi]$に適用して保証される．uの連続性によって，$\varepsilon\to 0$のとき$u(Q_\varepsilon)\to u(P)$．第６項は

$$\oint_{S\varepsilon}v\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon\oint_{S\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_Q}=-\frac{\ln\varepsilon}{2\pi}\frac{\partial u}{\partial n}(Q_\varepsilon)\cdot 2\pi\varepsilon\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

であるから，円S_ε上で消える．ここで，$u\in C^1(\Omega)$，l'Hospitalの規則と共に平均値定理を適用した．

9．5　(*a*)　辺長nの正方形は固有値$(l^2+m^2)\pi^2/n^2(l,m=1,2,\cdots)$をもつ．$u$を$\Omega_n$に対する固有関数として，他のすべての正方形上では０であると定義することによって，uを拡張することができる．よって，uは同じ固有値をもつΩに対する固有関数と異ならない．他方，Ωのすべての任意の固有関数uはあるΩ_n上で０であってはならず，そのΩ_nに制限すると，そこに局所固有関数が存在する．よって，すべての固有値の集まりは数集合 $\{(l^2+m^2)\pi^2/n^2: l,m,n$はすべて正整数$\}$である．

(*b*)　最小固有値は存在せず，よって０は作用素のスペクトルに属す．このことは，固有値の変分的特徴付けについて疑問が残る．

9．6　$u(P_0)>0$とし，P_0のまわりにボールB_{r_0}をとり，次いで極座標系でSchwarz不等式を用いると

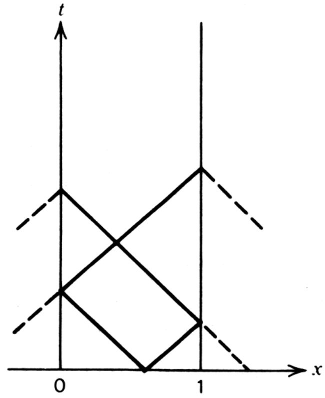
$$\int_\Omega u^2\geqq\int_{B_{r0}}u^2=\int_0^{r_0}\oint_{\partial B_r}u^2dr\geqq\int_0^{r_0}\left[\oint_{\partial B_r}u\right]^2\cdot\frac{dr}{l(\partial B_r)}.$$

ここで，$l(\partial B_r)$はB_rの境界の線測度あるいは面測度を示し，その量は$\omega_n r^{n-1}$である(節1.6.1参照)．ボールB_rに適用された平均値定理によって，$\oint_{\partial B_r}u=u(P_0)\omega_n r^{n-1}$がわかる．よって

$$\int_\Omega u^2 \geqq u^2(P_0)\omega_n \int_0^{r_0} r^{n-1}dr = u^2(P_0)\omega_n r_0^n/n.$$

これはr_0を十分大きくとるとき，任意の上界を超える．

9．7　図2.9hを見よ．Dirichlet境界条件に対して，初期位置のfを境界について奇関数的に延長するとき，d'Alembertの公式を用いると，境界上で解$u(x,t)$の値を0に留めることになるだろう．この事はfの正しい延長を見失わないため，次の“射線追跡”線図となる．同様にNeumann境界条件に対し境界点のまわりで奇関数的にfを延長する．データgとFも同様に扱われる．この方法は理論には有用であるけれども，1点または数点での$u(x_0,t_0)$に興味があるのでなければ，それほど実用的でない．



9．8　方程式$u_{xx}+4xu=16$は変数変換$z=\alpha x, \alpha=(-4)^{1/3}$のもとで，

$$u_{zz}-zu=2^{8/3}$$

となる．よってこの解はAiry関数$\mathrm{Ai}((-4)^{1/3}x)$と$\mathrm{Bi}((-4)^{1/3}x)$を用いて表すことができる．この様な2階線形方程式の特殊関数解は，すべて知られているとは限らず，またすべて解かれているとも限らない*)．

9．9　(a)　ヘリコイドは$u(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$によって，またカテノイドは$u=\cosh^{-1}((x^2+y^2)^{1/2})$によって与えられる．商の微分法により

$$u_x=-y/(x^2+y^2)$$
$$u_{xx}=2xy/(x^2+y^2)^2$$

これらを代入して確かめられる．カテノイドに対しても同様であるが，多少困

*)　式$u_{xx}+4xu$はある学生によって勝手にかき下ろされ，その後で初めてAiry型のものであるとわかった．

難が伴なう．

（c）示唆された“加法分離の”解は

$$\frac{X''}{1+(X')^2}=-\frac{Y''}{1+(Y')^2}=c$$

となり，これから$X(x)=-c^{-1}\ln|\cos cx|+c_2, Y(y)=c^{-1}\ln|\cos cy|+c_3$．よって

$$u(x,y)=c^{-1}\ln\left|\frac{\cos y}{\cos x}\right|.$$

積分定数の幾つかは省かれた．この解が平面内のチェスの碁盤領域上にあることに注意せよ．

（d）Born-Infeld方程式に対して，

$$\frac{X''}{1+(X')^2}=\frac{T''}{1-(T')^2}=c$$

が与えられ*），この式も上の様にして積分できる．スライシング方程式に対しては，２次式の解の特別の場合のみが求められる．

A．1　（a）$u(x)=u_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)$

$$+\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)\int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x_0}^{s}p(\tau)d\tau\right)q(s)ds.$$

（b）解は$u(x)=x+u_0$の形をとらなければならないが，しかしこのとき$u'(0)\neq 0$．

（c）$u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$とおくと，$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=0$，$\cdots$．

A．2　（a）$u(x,y)$は$y=2$を除いて，どこでも定義される解となっている．

（b）（i）$a(y_0(t))_t-b(x_0(t))_t=t\cdot 1-1\cdot t=0$．$\ell$は，比

$$\frac{dx_0(t)}{dt}:\frac{dy_0(t)}{dt}:\frac{du_0(t)}{dt}$$

が特性方向数の比$a:b:c$に一致するから，特性曲線である．さて，ODEの一般解を求めるには数多くの方法があるが，積分しないで求めるやり方もある．$u\cdot u_x=(\frac{1}{2}u^2)_x$に注目すると，これから，$u^2(x,y)=2x-2\int^x u_y+w(y)$．ただし，$w$は任意ではあるが，$-2\int^x u_y+w(y)$が初期曲線上で消えなければならない．解$u=s+t$，$y=s+t$，$x=(s+t)^2$はこの問題に先行した例題と同様にして，ODEの初期値問題を解いて求められる．この問題に続く議論から，完全解は次の二つの補助方程式から決められる．

*）加法的変数分離法の奇策を用いてそれを見出すとは，わかっていなかったけれども，これはScherksの極小曲面である．

$$\text{(i)}\quad u_0p_0+q_0=1,$$
$$\text{(ii)}\quad u_0'=p_0x_0'+q_0y_0'.$$

しかし，ℓが特性曲線のとき，これらは同じ方程式になる．すなわち

$$tp_0+q_0=1.$$

よって，このとき，無限個のp_0，q_0の対があって，無数の解が生成される．

(ii)　ℓは特性曲線でないが，そのヤコビアンが恒等的に消える．次のODEの系を積分して

$$\begin{cases} dx/ds=u & \Rightarrow \quad x=s^2/2+ts+t^2, \\ dy/ds=1 & \Rightarrow \quad y=s+2t, \\ du/ds=1 & \Rightarrow \quad u=s+t, \\ x(0)=t^2, & \quad y(0)=2t, \quad u(0)=t. \end{cases}$$

すなわち，次の曲面が求まる．

$$u(x,y)=y/2\pm\sqrt{x-y^2/4}.$$

実際，これはℓ以外で与えられたPDEを満たす．けれども，ℓに沿って，すなわちℓに近づくと，この曲面上で

$$u_x=\pm\frac{1}{2}\left(x-\frac{y^2}{4}\right)^{-1/2}\longrightarrow\pm\frac{1}{2}(t^2-4t^2/4)^{-1/2}$$

となり，爆発する．

(iii)　興味ある点は，明らかに$t=2$.

(c)　主要な点は，方程式(1)の積分曲面$u(x,y)$が自分自身その様な点x_0，y_0，u_0，p_0，q_0から特性帯を構成して生成されることである．

A．3　(a)　PDEと成帯条件から，二つの式$p_0q_0=2$，$p_0+q_0=3$が得られ，これから，$p_0=1$，$q_0=2$と$p_0=2$，$q_0=1$の二組の初期方向がわかる．ヤコビアンの“非特性”条件$F_{p_0}y_0'-F_{q_0}x'_0=q_0-p_0\neq 0$が満たされる．特性ODEはこのとき，（第一の組，$p_0=1$，$q_0=2$に対して）

$$\begin{cases} dx/ds=2 & \Rightarrow \quad x(s,t)=2s+t, \\ dy/ds=1 & \Rightarrow \quad y(s,t)=s+t, \\ du/ds=4 & \Rightarrow \quad u(s,t)=4s+3t, \\ dp/ds=0 & \Rightarrow \quad p=p_0, \\ dq/ds=0 & \Rightarrow \quad q=q_0. \end{cases}$$

これについての解は示された様に，$u(x,y)=x+2y$. 他の組$p_0=2,q_0=1$に対しては，$u(x,y)=2x+y$.

(b)　二つの補助方程式から，$p_0=1,q_0=t$.

(c)　$(p_0,q_0)=(\sin t,\cos t)$と$(-\sin t,-\cos t)$. 解軌道は$(u\pm 1)^2=x^2+y^2$によって与えられる．

A.4 (a)　問題1.9.1の分類手続から，波動方程式の不変性により，次が要請される．

$$b^{11}=c_{11}^2-c_{12}^2=1 \quad （あるいは-1）$$
$$b^{12}=c_{11}c_{21}-c_{12}c_{22}=0$$
$$b^{22}=c_{21}^2-c_{22}^2=-1 \quad （あるいは\ 1）$$

第一式と第三式は双曲線である．それらを結合するために，判別関係（問題1.9.1参照）に代入して，第二式を用いると，

$$c_{11}^2c_{22}^2+c_{12}^2c_{21}^2-2c_{11}c_{22}c_{12}c_{21}=1,$$

すなわち

$$(c_{11}^2-c_{12}^2)c_{22}^2+(c_{21}^2-c_{22}^2)c_{12}^2=1.$$

さらに，第一式と第二式を用いて，

$$c_{22}^2-c_{12}^2=1.$$

これに第三式を加えると，$c_{12}=\pm c_{21}$の関係が，また第二式に代入して，$c_{11}=\pm c_{22}$が求まる．よって，可能な変換の組は形式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \pm b & \pm a \end{bmatrix}, \quad a^2-b^2=\pm 1$$

の行列で与えられるものに帰着された．

(b)　r-方程式はu-項を含まず，よって$v=u_r$とおける．そこで，1階方程式$v_r-2r(1-r^2)^{-1}v=0$を解く．これから，$v=(1-r^2)^{-1}$．これを積分して，$u=(1/2)\ln((1+r)/(1-r))$．この解はまた，分類で行った変数変換$\xi=x+t$，$\eta=x-t$を用いて，$u(r)=u(\xi,\eta)=(1/2)\ln(\xi/\eta)$．$s$-方程式はその解が$u(s)=e^s=t$となって，$x$と$t$のすべての1次関数が波動方程式の解である事実の自明な例であって，興味は薄い．

(c)　四つの群公理を確かめよ．

A.5 (a)　代入して，$-t$倍すると，$(\alpha x^2/t)u_\eta+2\alpha u_\eta+(4\alpha^2x^2/t)u_{\eta\eta}=0$．これは$u_\eta$に関する1階の方程式で，これから，$u_\eta=v=\eta^{-1/2}e^{-\eta/4\alpha}$．

(b)　相似変数$\eta=x^2/t$の代りに，その平方根を用いて，$\eta=x/\sqrt{t}$とすると，任意の解$u(x,t)=g(\eta)$に対する常微分方程式が得られる．すなわち

$$g''(\eta)+\frac{\eta}{2}g'(\eta)=0.$$

よって

$$g'(\eta)=c_1 e^{-\int \eta/2}=c_1 e^{-\eta^2/4}.$$

積分して

$$g(\eta)=c_1\int_{\eta_0}^{\eta} e^{-s^2/4}ds+c_2.$$

（c） 連鎖規則によって得られる．$m=1$のとき，これは上の(b)の方程式である．

A．6 （a） $p_x=0$とおくと，Prandtlの運動量方程式は，$U_\infty^2/L\sim\nu U_\infty/\delta^2$となる．これから$\delta^{-2}=(LU_\infty/\nu)/L^2$.

（b） また，流線上で$uY_\varphi=1$，$uY_x=V$が得られる．極限において，境界層は流線そのものであるとの解釈がなされる．

（c） イギリス学派のより進んだ結果を参照せよ*)．

A．7 （a） ODEの参考書を見よ．本質的に，$\Delta x=\tilde{x}-x$，$\Delta y=\tilde{y}-y$．$\Delta u=\tilde{u}-u$とかくと，変数変換は$O(\varepsilon^2)$を省略して，その極限で

$$\frac{\Delta x}{X}=\frac{\Delta y}{Y}=\frac{\Delta u}{U}=\varepsilon=ds.$$

（b） 結局，延長が認められる．上の(a)で$\varepsilon=ds$は，群の無限小引数を付録A．1における1階PDEに対するものに結びつけるとき，有効な手掛かりとなる．

（c） これは分離可能であり，よって原理的には常に，相似変数$\eta(x,y)$になる．例えば，$X(x)=x, Y(y)=y$のとき，解は$x/y=c$．これを相似独立変数に等しくおいて，$\eta=c$.

A．8 （a） これは誤差に対して多くの注意を要するので，非常に冗長である．MACSYMAの様な記号的処理を用いた計算機コードがそのために開発された†)．

（b） 2次の項hh'は他の解を暗示する．実際，方程式を因数分解して

$$(\eta^4 h+1)(\eta h'+2h)=0.$$

第一因子は既に見出されている解$f_1(\eta)=\eta^{-3}/3+c_1$を与え，第二因子は新しい解$f_2(\eta)=c_2\eta^{-1}+c_3$を与える．ここで$c_3=-c$．遷音速流の方程式の解として，後者は既知の解$u=c_2y+c_3x$になるので，余り興味のあるものではない．

（c） 交代的に，熱方程式を考えよ．

A．9 （a） $V_1=\partial/\partial x, V_2=\partial/\partial y, V_3=\partial/\partial u, V_4=\dfrac{3}{2}x\partial/\partial x+y\partial/\partial y,$

$$V_5=-\frac{1}{2}x\partial/\partial x+u\partial/\partial u, V_6=x\partial/\partial u.$$

*） F.T.Smith, "On high Reynolds number theory of laminar flows," *IMA J. of Appl. Math.*, **28** (1982),207-251.

†） 次を見よ．P.Rosenau and J.Schwarzmeier, *Courant Iust. Math. Sci. Report* C00-3077-160/MF-94(1979).

(*b*)　節2.2で導入された意味で，過剰正則性．ここで進めているこの事柄をさらに支持するために，上の理論で，(データ無しの)同次方程式を通常取扱っていることに注意しよう．すべてのデータfに対して考えられた微分方程式$L(u)=f$の関数解析的領域$D(L)$によって，uの一般的な正則性は，作用素の値域内ですべてのその様なデータ関数fを適応させる様に制限される．与えられた特別のデータfに対し，特に同次問題($f\equiv 0$)に対して，その解はより以上に正則であるだろう．実用的には，一般化された対称性の多くは，その結果，方程式を何回か微分して得られるものとみられる．

(*c*)　保存則の形式，すなわち発散形式の双曲型方程式

$$u_t+(f(u))_x=0$$

の取扱いに対して，Lax-Wendroffのスキームは本質的に，次式に従って与えられた方程式を更に微分することに依存する．

$$u_{tt}=-(f(u))_{xt}=-(f(u)_t)_x=-(A(u)u_t)_x=-(A(u)(f(u))_x)_x.$$

ここで，行列$A(u)$は$f(u)$のuに関するヤコビ行列である．この事は(*b*)で述べたことを支持する．

休止　第5回

1．解$u(x,t)$は速さcで右方へ移動する衝撃波である．

2．‘**物質微分**’$D/Dt=\partial/\partial t+u\cdot\nabla$は力学において‘運動に伴う微分’を表すものである．例えば，流体においては，‘下流に浮ぶ’観測者が算定する様な流体の微分演算である．よって，$u_t+uu_x=0$とはどんな相対加速度も存在しないことを示している．D/Dtはまた**粒子微分**と呼ばれる．$\partial/\partial t$は1点xでの対象物の局所的時間変化率を意味し，$u\cdot\nabla$は物質の空間的移動に基づく(uによる)対流変化率を表す．この様に，$u_t+uu_x=0$は局所的変化u_tが対流による損失$-uu_x$に等しいことを意味する．

気体および流体動力学のEuler方程式の一部をとり出した形であるから，よりよい名称はEuler方程式かも知れないが，Eulerなる言葉は使われ過ぎである．最近になって，$u_t+uu_x=0$を保存則形$u_t+(u^2/2)_x=0$における**Burgersの方程式**とよぶことが流行っている．しかし，Burgersの関心はきまって方程式中に粘性項を，例えば，$u_t+uu_x+\nu u_{xx}=0$の様にνu_{xx}を持つことにあった．移流方程式に対してよい名称は，図5Pbで示された様に$(u_t,\ u_x)\perp(1,c)$の意味で正規方程式であろう．特性曲線に沿うuの接導関数$\partial u/\partial\boldsymbol{\tau}$とはまさに$\boldsymbol{\tau}$方向に関してとられたgrad$u$，すなわち$\partial u/\partial\boldsymbol{\tau}=u_t+cu_x$である．よって，$u_t+cu_x=0$とは接線方向に不変であって，すべて変化が法線方向にあることを示し，uの勾配はすべて法線方向にとられ，従ってこの方向は最も急勾配の下降線*)(のみ)の方向と考えられる．さらに，

*)　勝ちたいと願うスキヤーはこの下降線にのって滑べる．

1階偏微分方程式系の理論の範囲内で$u_t+cu_x=0$を正規方程式とよんでも矛盾しない正規方程式と正規形があるが，正規方程式という名称は使われ過ぎていて，多くの局面に現われた．

よりよい名称は特性方程式かも知れないが，それも既に常微分方程式$dx/dt=c$に対して用いられてきた．事実これら三つの方程式$u_t+cu_x=0$のすべてはかつて特性方程式とよばれ得たし，実際対流微分$D/Dt=\partial/\partial t+c\partial/\partial x$は，特性方向の方向微分として，特性微分とよばれもした．しかし，付録Aの初めに注意した様に，特性解という言葉が広く用いられている．

よって，形が

$$u_t+c(u,\text{他})u_x=g$$

であるこれらの方程式すべてに対して非常によい名称は，すなわち，**移流方程式**である．advectionには輸送する，運ぶ，伝達するといった意味がある．この式で“他”の意味は他の変数のことであって，例えば，渦度の輸送方程式$\omega_t+v\omega_x=\nu\omega_{xx}$，$c=v$(右辺の粘性項を法とする渦度の移流をつかさどる速度)の様にuの導関数ではない．“g”はデータそのもの，すなわち$g=g(x,t)$，よって付録A.1の完全な準線形の方程式で終るものではない．輸送方程式は同じ程度によい呼称であるが，既に他の分野で大いに用いられている

3．変数の対応は$y=t$で，混乱を避けるためにτを初期曲線のパラメータとしよう．主眼点は付録A.1が非同次方程式をも扱うことによってより一般的になっていることである．後者は休止第6回で一層重要性を増す．

4．衝動波動力学はそれ自体主題をなす*)．この回の休止をまさに休止とすべく，この問題一つにしぼって衝動波動力学を論ずることにする．ここで与える幾つかの概念は休止第6回で議論される数値的な衝動波捕捉スキームを理解するために必要となる．

図5Pcで示されている様に，対流方程式の初期分布$u(x,0)$のどの減少部分もその後下流で衝撃波を誘発していく．もっと正確にいえば，特性曲線が出会う点(x,t)における二解の値差の間に衝突が起こる．つまり，衝突†)には二つの初期値がある

*）　問題2.9.8に挙げたWhithamの書を参照せよ．他の優れた書で，最近の扱いは次に見られる．J.Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, (Springer, New York, 1983).

†)　もっと正しくは，流体方程式の粘性項を落とした代償を支払っている．物理学的な在り方では，解は非常に切り立っているが，連続な衝撃を表す．ここでは，Euler方程式または(粘性項をもった)Navier-Stokes方程式のいずれかに準拠する専門家によって全く相反する見解を見る．

モデル方程式の解に見出される多くの矛盾，爆発，不連続性は結局はモデルを扱った人自身によって導入されたものと理解される．一方で完全な方程式を解いてしまうまでは，単純なモデルが用いられねばならない．そして，不連続衝撃波面は全く物理学的効果を図的に描いたものであることを認めねばならない．

わけである．

この様な点を越えて解を一意的に下流に接続させることは跳躍(Rankine-Hugoniot)とエントロピー評価の概念を必要とする．歴史的にはこれらは物理学上の気体動力学的考察(例えば，衝撃波前後の速度と密度の間の跳躍関係$u_l/u_r=\rho_r/\rho_l$，および衝撃によるエントロピーの必然的な増大など)によって触発された．ここではこれら二つの概念を正則性の考え，すなわち，解を可能な限り正則に保っておこうとすることによって説明しよう．

初めに図5Pcにある様にu_l(左側の値)$>u_r$(右側の値)の場合にもどれば，古典的(例えば，連鎖規則で仮定したC^1級，すなわち連続可微分の)解の考えを捨てて，弱解を受け入れなければならない．ある点または曲線—ここでは衝撃曲線となる—以外での弱解は実際上非常に有効である(休止第4回)．ここでの目的は弱解に正則条件を仮定して衝撃曲線を見出すことである．
休止第4回の最後の例題と同じ様に進めると，要請することは弱解が少くとも区分的にC^1級であること，およびC_0^1級の任意のtest関数ϕを保存則方程式$u_t+(f(u))_x=0$に乗ずることである．ここで，すべてのϕは問題にしている衝撃点の微小近傍Bの外部で恒等的に消える関数である．Bを左部分B_lと右部分B_rに分ける衝撃曲線$x(t)$上でuのただ一つの不連続性が生じると仮定すると，発散定理によって次を得る．

$$\iint_B(\phi_t u+\phi_x f(u))=-\iint_{B_l}(u_t+(f(u))_x)\phi-\iint_{B_r}(u_t+(f(u)_x)\phi$$
$$+\oint_{x(t)}(u^l n_t^l+f(u^l)n_x^l)\phi+\oint_{x(t)}(u^r n_t^r+f(u^r)n_x^r)\phi.$$

ここで，$(n_t^l,\ n_x^l)$は曲線$x(t)$への左外向き単位法ベクトル，同様に$(n_t^r,\ n_x^r)$は$x(t)$への右外向き単位法ベクトルである．左辺のB上の積分は弱解の定義からすべてのϕに対して消え，またuがB_lとB_r上では古典的な解であるからB_lとB_r上のそれぞれの積分もすべてのϕに対して消える．よって，$x(t)$全体上の積分も消えることになる．さて，変数の順序はt，xであり，$n^l=(-dx,dt)$および$n^r=(dx,-dt)$は適当に規格化されることに注意しよう．従って，ϕの任意性から衝撃曲線$x(t)$に沿って

$$u^l(-dx)+u^r(dx)+f(u^l)dt+f(u^r)(-dt)=0$$

が成り立つ．これが跳躍条件であって，通常は

$$s[u]=[f(u)]$$

とかかれる．ここで$[u]=u_l-u_r$，$[f(u)]=f(u_l)-f(u_r)$，および$s=dx/dt$．この様にして，弱解の正則性と要求された衝撃の速さsに対して要請されたuと$f(u)$の間の跳躍関係が見出された．更に，衝撃が左右の解の値を用いて，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{f(u^l)-f(u^r)}{u^l-u^r}$$

によって特徴付けられることを見出した．

重要な例として，対流方程式$u_t+(u^2/2)_x=0$に対する衝撃曲線は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(u_l^2-u_r^2)/2}{u_l-u_r}=\frac{u_l+u_r}{2}$$

で与えられ，これは衝突して衝撃波を形作る二つの特性曲線の傾きの平均である．衝撃波が交差する特性格子によって作られる平行四辺形を通って上方に向って二分割することを理解するためにこれを説明することは価値がある．

注目すべきは$u_l>u_r$のとき，つまり衝撃波の場合である．$u_r>u_l$のときは特性解は扇形に閉じるよりむしろひろがる．では，初期値の伝播が考慮されないとき，下流での食い違いをどううめるか？それには多くの補間法があり，実際対流方程式に少しばかり時間をかければわかることだが，事実(区分的にC^1級の)弱解である無数の補間による解があり得る．先に述べた様に，ここでは，エントロピーは$u_r<u_l$のとき生じる衝撃を越えて増大しなければならないという，文字通りのエントロピー条件に関する議論が常に見出される．しかし，$u_r>u_l$の場合に衝撃はエントロピーを減少させることがある．そこで，エントロピー条件に関する物理学的基盤に配慮して，この場合の衝撃を避けたい．解の選択は再び気体動力学の教える所により，**稀薄波**とよばれる扇状の解が選ばれる．これらは，比$\eta=x/t$だけに依存する解$u(x,t)=u(x/t)$であるか，または初期点が原点にないならば，$u(x,t)=u((x-x_0)/(t-t_0))$と表せる解である．これらはまた**集中的単純波**とよばれる．これらの解は例えば，エントロピー不等式

$$f'(u_l)\leqq f'(u(\eta))\leqq f'(u_r)$$

の様なエントロピーの考察によって導かれる種々の条件を満たすことが示される．これらはまた**扇形解**，または**射線解**ともよばれる．定義からこれらは射線$x/t=$定数の上で一定である．

これが意味するものを重要な例である対流方程式$u_t+(u^2/2)_x=0$に対してみておこう．初期点を原点$(0,0)$，初期分布を$u_l(x,0)=0(x<0)$および$u_r(x,0)=1(x>0)$としよう．このとき，特性曲線$x(t)$はt軸の左方へまっすぐに進み，解はt軸の右方へ45°の角度で真直ぐに進む．解の差を希薄波

$$u(x,t)=x/t,\quad 0<x<t$$

でうめる．容易にわかる様に，これはすべてのxおよび$t>0$に対して一つの解である．すなわち

$$u_t+uu_x=-x/t^2+(x/t)(1/t)=0.$$

t軸の左方へ定数解0に，また45°射線の右方へ定数解1に結びつけるとき，この解はすべてのxと$t>0$に対して連続な弱解となる．対流方程式では$f'(u)=u$であるから，この解はエントロピー不等式を満たす．

以上が**衝撃波動力学**についていえるすべてである．ここでの観点はあるものと少しばかり異なっていた．すなわち，選ばれた解は可能な限り正則な様に決定さ

るべきであることを強調した．そうすることによって，(粘性の)実在する現象に対する最良近似を得なければならない．対流方程式の例を考えよう．この正則性の観点から，跳躍条件は解$u(x,t)$を衝撃波に関して正確に“定める”ものと考えられる．$u=(u_l+u_r)/2$としよう．このとき，衝撃曲線$x(t)$は初めに$dx/dt=\overline{u}$から定められた誘導特性解とみられる．この様に指定された$\overline{u}$は不連続点で“最も正則な”導関数を与える．つまりu_lから中間値$\bar{u}$を通ってu_rへの垂直降下にみられる不連続性においてである．同様に，エントロピーの条件は最良の(最低次の非振動的)物理学的手法で“特性上の食い違い”を越えて解$u(x,t)$を“滑らかにする”もの，すなわち，稀薄性扇と考えられる．この線形の単調な古典的解は不連続性$u_l<u_r$を補間して，不連続点においてだけでなく，できる限り離れた下流においてさえも衝撃のない解を導いてくれる．頂点での稀薄特異性は不連続点で“垂直解”$u(x,t)$を正確に“決定する”ものと考えられる：そこでは$\bar{u}(0,\ 0,\ x/t)=x/t$としよう．この垂直解はu_lをu_rへつなげ，不連続性を取り除くに従って，連続的に扇化していく．このとき，扇を形成する直線$x(t)$は初期的に$dx/dt=u$から決められた誘導特性解の連続な族とみなされる．この様なuは稀薄性扇を形成して，不連続点で“最も正則な”解を与える．これらの例で衝撃と扇の速さは中間であり，最も達した値で不連続点の両側での特性解の速さの平均となる．

5．特性解$\eta=x-ct=x_0$に沿った定数解$u(x,t)=u_0$は相似解である．並進方程式の解uは持性方向$(1,c)$において並進操作の下で不変であるが，これはその群作用の下での不変性を示している．稀薄性扇(問題 4 の解答参照)は両者とも相似解で，かつ拡大群$x\to\alpha x$，$t\to\alpha t$の下でも不変である．

6．行列Aが対角化可能$Q^{-1}AQ=D$であるとはQの列が固有値λ_iに対応する固有ベクトルであることを意味し，また，逆も成り立つ．よって，$Q^{-1}AQ=D\Rightarrow(Q^{-1}AQ)^*=D^*=D=Q^*A^*(Q^*)^{-1}$から，$A^*$の固有ベクトル$v_j$は$Q^{-1}$の行である．$A$と$A^*$の固有ベクトルは，時にはそれぞれ$A$の右固有ベクトル，左固有ベクトルとよばれる．休止第 6 回で次の事実を用いることは興味深いことである．対角化可能な実$n\times n$行列Aに対して，右固有ベクトルr_iおよび左固有ベクトルℓ_iは互いに直交する：$(r_i,\ell_j)=0(i\neq j)$，$\neq 0(i=j)$．このことは$Q^{-1}Q=\mathrm{I}$の関係から容易にわかる．

7．それぞれ，$\lambda=c$，u，$c(u)$で，固有ベクトルはすべて$v=1$である．

8．保存則系$u_t+(f(u))_x=0$から，発散定理

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega udx+\oint_{\partial\Omega}f(u)\cdot n=0$$

を得る．ここで，Ωは興味ある領域である．この定理はこの様な系すべてに一般的な意味を与えてくれる．すなわち，uの平均の変化率はΩの境界を通過する全流量に等しい．領域Ωは物理学的領域であってもよいし，数値的に興味ある領域，ある制御領域または離散化領域などであってもよい．

9．行列Aの固有値は容易に見出せる：

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u-\lambda \end{vmatrix}=(u-\lambda)((u-\lambda)^2-\gamma p/\rho)$$

から，$\lambda_1=u-c$，$\lambda_2=u$，$\lambda_3=u+c$，$c=(\gamma p/\rho)^{1/2}$．それぞれに対応するAの固有ベクトルは$(1,-c/\rho,c^2)$，$(1,0,0)$，$(\rho/c,1,\rho c)$，およびA^*の固有ベクトルは$(0,1,-1/\rho c)$，$(1,0,-1/c^2)$，$(0,1,1/\rho c)$である．後者の固有ベクトルを用いると，次の常微分方程式系へ帰着される．

第一特性解（傾き$u-c$)上，$\dfrac{du}{dt}-\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{dp}{dt}=0,$

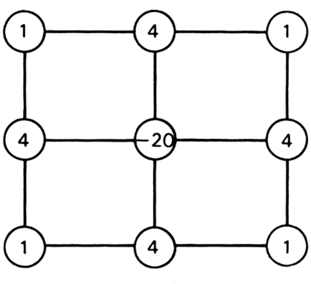
第二特性解（傾きu)上，$\dfrac{d\rho}{dt}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{dp}{dt}=0,$

第三特性解（傾き$u+c$)上，$\dfrac{du}{dt}+\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{dp}{dt}=0.$

B．1　(a)　$u(x,t+k)=u(x,t)+ku_x(x,t)+O(k^2)$また$u(x\pm h,t)=u(x,t)\pm hu_x(x,t)+h^2u_{xx}(x,t)/2+h^3u_{xxx}(x,t)/6+O(h^4)$，よって

$$\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}+O(h^2)=\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}+O(k)$$

(b)　図のステンシルは$\Delta u=0$に対して$O(h^4)$近似となる．



(c)　三重対角行列，五重対角行列，その他同様の対角行列はToeplitz行列の理論のもとで研究される．

B．2　(a)　$U_{1,1}=5/32=U_{3,1}$，$U_{2,1}=7/32$．これから$U_{2,2}=3/16$．

(b)　分母を払って

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,0} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} \end{bmatrix}$$

これから，$(U_{1,1},\ U_{2,1},\ U_{3,1})=(11/17,\ 15/17,\ 11/17)$．

(c)　(b)と同じAとBが用いられ，よって

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

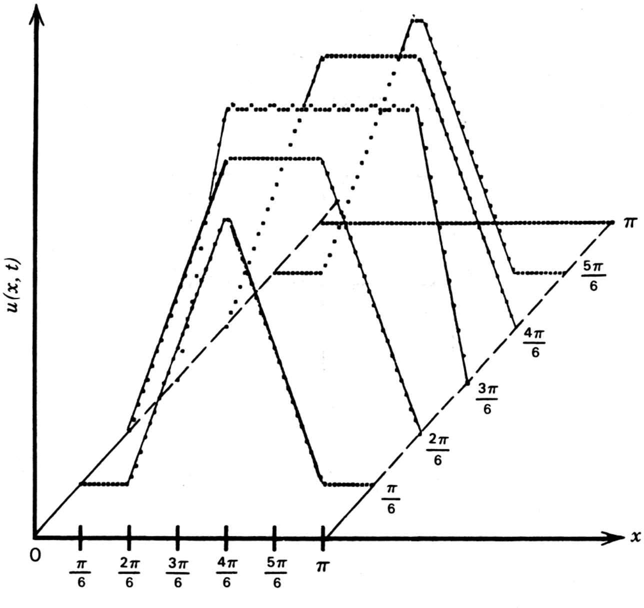
これから

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7\sqrt{2}+8)/34 \\ (4\sqrt{2}+7)/17 \\ (7\sqrt{2}+8)/34 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.526 \\ 0.745 \\ 0.526 \end{bmatrix}$$

解析解は$u(x,t)=e^{-t}\sin x$で，計算して

$$\begin{bmatrix} u(\pi/4,\pi^2/32) \\ u(\pi/2,\pi^2/32) \\ u(3\pi/4,\pi^2/32) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.519 \\ 0.735 \\ 0.519 \end{bmatrix}$$

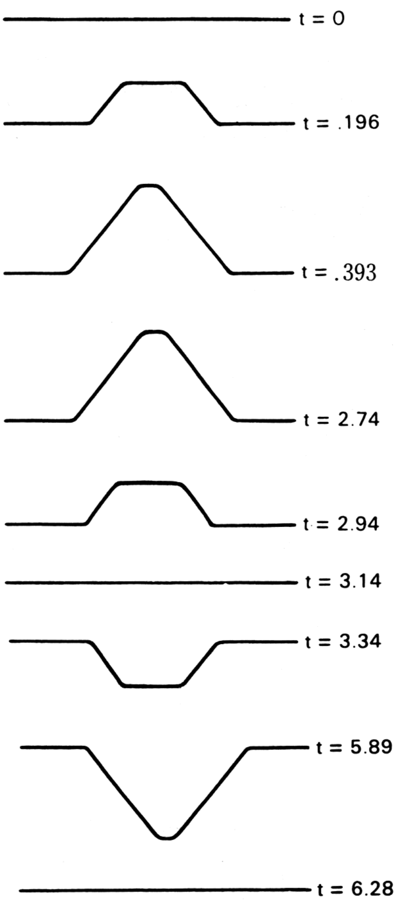
となり，約1.35%の相対誤差をもつ．



解B.3(a)　節2.1　問題1の数値解

B. 3　(*a*)　ここに二つの異なる出力のプロットを載せる. 第一は$T=\pi$までのもので, 他はそれ以後のものまで含めた時刻における断面である. d'Alembertの解から期待されるデータの拡がりとよい一致を示すことに注意せよ.

(*b*)　ここに, 計算プログラムと, 任意の初期データとUNIT=1, $h=0.1$, $k=0.01$のときの解の出力を載せる.



```
UNIVERSITY OF MINNESOTA FORTRAN COMPILER (VERSION 5.4 - 79/03/01) ON THE 6400 UNDER
KRONOS 2.1.0 ON 81/09/30 AT 10.34 UNIVERSITY COMPUTING CENTER - UNIVERSITY OF COLORADO

                      MNF(I=CRANK1,PL,BL)

                      C  ****************************************************************
                      C  * THIS PROGRAM CALCULATES THE SOLUTION OF A PARABOLIC DIFFERENTIAL *
                      C  * EQUATION IN A UNIT SPACE DOMAIN HAVING ZERO END CONDITIONS. THE  *
                      C  * CALCULATIONS ARE PERFORMED BY MEANS OF A CRANK-NICOLSON FINITE   *
                      C  * DIFFERENCE SCHEME. THE INITIAL CONDITION (AT TIME=0) IS SPECIFIED*
                      C  * BY A FUNCTION (UINIT) WHICH CAN BE APPENDED TO THE MAIN PROGRAM. *
                      C  * THE MAXIMUM NUMBER OF INTERIOR POINTS IS 9. THE SYSTEM OF LINEAR *
                      C  * ALGEBRAIC EQUATIONS IS SOLVED BY GAUSS-JORDAN ELIMINATION METHOD *
                      C  ****************************************************************
                      C
                      C

   1.     000000B           REAL K
   2.     000000B           DIMENSION C(9,9),X(9),F(9),U(9),D(9)
                      C
                      C     ...READ DISCRETIZATION DATA
   3.     002131B           READ (5,102) H,K,TMAX
                      C
                      C     ...SET COEFFICIENTS
   4.     002325B           N=IFIX(1./H-1.)
   5.     002327B           R=K/(H*H)
   6.     002330B           TIME=0.0
   7.     002331B           N1=N-1
   8.     002333B           R2=2.-2.*R
                      C
                      C     ...SET COEFFICIENTS OF (C) MATRIX
   9.     002336B           DO 10 I=1,N
  10.     002340B              DO 10 J=1,N
  11.     002342B                 C(I,J)=0.0
  12.     002342B        10 CONTINUE
  13.     002352B           DO 11 I=1,N1
  14.     002354B              J=I+1
  15.     002354B              C(I,J)=-R
  16.     002357B              C(J,I)=-R
  17.     002362B              C(I,I)= 2.+2.*R
  18.     002365B        11 CONTINUE
  19.     002366B           C(N,N)=2.+2.*R
                      C
                      C     ...SET (X) ARRAY AND INITIALIZE (U)
  20.     002371B           DO 1 I=1,N
  21.     002373B              X(I)=FLOAT(I)*H
  22.     002374B              F(I)=UINIT(X(I))
  23.     002401B              U(I)=F(I)
  24.     002402B         1 CONTINUE
                      C
                      C     ...PRINT DISCRETIZATION DATA AND COEFFICIENT MATRIX
  25.     002405B           WRITE (6,105)
  26.     002410B           WRITE (6,100) R,H,K,TMAX
  27.     002417B           WRITE (6,106)
  28.     002422B           DO 40 I=1,N
  29.     002424B              WRITE (6,103) (C(I,J),J=1,N)
  30.     002441B        40 CONTINUE
                      C
                      C     ...PRINT HEADINGS AND INITIAL CONDITION
  31.     002443B           WRITE (6,101) (X(I),I=1,N)
  32.     002454B           WRITE (6,104) TIME,(U(I),I=1,N)

                      C
                      C     ...LOOP UNTIL DESIRED TIME (TMAX)
  33.     002465B         4 CONTINUE
                      C        ...INCREMENT TIME
  34.     002465B              TIME=TIME+K
                      C
                      C     ...CALCULATE RIGHT-HAND VECTOR (D)
  35.     002466B              DO 2 I=2,N1
  36.     002471B                 D(I)=R*(F(I-1)+F(I+1))+R2*F(I)
  37.     002471B         2    CONTINUE
  38.     002500B              D(1)=R2*F(1)+R*F(2)
  39.     002503B              D(N)=R2*F(N)+R*F(N1)
                      C
                      C        ...CALCULATE SOLUTION VECTOR (U)
  40.     002507B              CALL GAUSS(C,D,U,N)
                      C
                      C        ...PRINT SOLUTION VECTOR AND TIME
  41.     002513B              WRITE (6,104) TIME,(U(I),I=1,N)
                      C
                      C        ...RESET VALUES OF (F) FOR NEXT TIME STEP
  42.     002524B              DO 3 I=1,N
  43.     002526B                 F(I)=U(I)
  44.     002526B         3    CONTINUE
                      C
                      C        ...CHECK CURRENT TIME AND STOP
  45.     002532B              IF (TIME.GE.TMAX) STOP
```

```
     002535B          GO TO 4
              C
              C
              C      **************  FORMAT STATEMENTS  ***************************
              C
     002535B     100 FORMAT (3(/)35X,4HR = ,F4.1,10X,4HH = ,F4.2,10X,4HK = ,
                   1        F5.3,10X,7HTMAX = ,F5.3)
     002535B     101 FORMAT (1H1///////28X,5HX =  ,9(F3.1,6X)//)
     002535B     102 FORMAT (3F10.0)
     002535B     103 FORMAT (/42X,9(F4.1,2X))
     002535B     104 FORMAT (/10X,7HTIME = ,F5.3,8X,9(F7.4,2X))
     002535B     105 FORMAT (1H1,8(/),52X,5(1H*),21H  CALCULATION  DATA  ,5(1H*))
     002535B     106 FORMAT (8(/),51X,5(1H*),23H  COEFFICIENT  MATRIX  ,5(1H*)//)
     002535B         END


     000000B          SUBROUTINE GAUSS(C,B,X,N)
              C  ******************************************************
              C  * SOLVE UP TO 9 SIMULTANEOUS LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS *
              C  * BY GAUSS-JORDAN ELIMINATION METHOD                    *
              C  ******************************************************
              C
     000000B          DIMENSION A(9,9),C(9,9),B(9),X(9)
              C
              C       ...RESET LOCAL COEFFICIENT MATRIX (A)
     000000B          DO 6 I=1,N
     000123B             DO 6 J=1,N
     000125B                A(I,J)=C(I,J)
     000125B        6 CONTINUE
              C
              C       ...PERFORM MANIPULATIONS
     000135B          DO 4 I=1,N
     000136B             DO 2 K=1,N
     000140B                IF (K.EQ.I) GO TO 2
     000142B                CONST=-A(K,I)/A(I,I)
     000147B                DO 1 J=1,N
     000152B                   A(K,J)=A(K,J)+CONST*A(I,J)
     000160B                   IF (J.EQ.I) A(K,J)=0.0
     000165B        1       CONTINUE
     000167B                B(K)=B(K)+CONST*B(I)
     000173B        2    CONTINUE
     000176B             CONST=A(I,I)
     000200B             DO 3 J=1,N
     000202B                A(I,J)=A(I,J)/CONST
     000202B        3    CONTINUE
     000210B             A(I,I)=1.0
     000212B             B(I)=B(I)/CONST
     000214B        4 CONTINUE
              C
              C       ...OBTAIN SOLUTION VECTOR
     000217B          DO 5 I=1,N
     000220B             X(I)=B(I)
     000220B        5 CONTINUE
     000224B          RETURN
     000226B          END


     000000B          FUNCTION UINIT(V)
              C  **********************************************************
              C  * SPECIFY AND CALCULATE INITIAL CONDITION AT MESH POINTS (V) *
              C  **********************************************************
              C
     000000B          UINIT=1.0
     000001B          RETURN
     000004B          END
     CAUTION  ---------------------------------DUMMY ARGUMENT V WAS NEVER USED
```

```
                    *****  CALCULATION  DATA  *****


     R =    .1            H =   .10            K =   .001            TMAX =   .200
```

***** COEFFICIENT MATRIX *****

2.2	-.1	0	0	0	0	0	0	0
-.1	2.2	-.1	0	0	0	0	0	0
0	-.1	2.2	-.1	0	0	0	0	0
0	0	-.1	2.2	-.1	0	0	0	0
0	0	0	-.1	2.2	-.1	0	0	0
0	0	0	0	-.1	2.2	-.1	0	0
0	0	0	0	0	-.1	2.2	-.1	0
0	0	0	0	0	0	-.1	2.2	-.1
0	0	0	0	0	0	0	-.1	2.2

	X = .1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
TIME = 0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
TIME = .001	.9089	.9959	.9998	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9959	.9089
TIME = .002	.8337	.9848	.9990	.9999	1.0000	.9999	.9990	.9848	.8337
TIME = .003	.7709	.9695	.9971	.9998	1.0000	.9998	.9971	.9695	.7709
TIME = .004	.7181	.9514	.9940	.9994	.9999	.9994	.9940	.9514	.7181
TIME = .005	.6731	.9318	.9897	.9987	.9997	.9987	.9897	.9318	.6731
TIME = .006	.6345	.9115	.9843	.9978	.9995	.9978	.9843	.9115	.6345
TIME = .007	.6011	.8912	.9779	.9964	.9990	.9964	.9779	.8912	.6011
TIME = .008	.5719	.8710	.9707	.9946	.9984	.9946	.9707	.8710	.5719
TIME = .009	.5462	.8514	.9628	.9924	.9975	.9924	.9628	.8514	.5462
TIME = .010	.5234	.8323	.9544	.9897	.9963	.9897	.9544	.8323	.5234
TIME = .011	.5031	.8140	.9455	.9866	.9948	.9866	.9455	.8140	.5031
TIME = .012	.4848	.7965	.9363	.9831	.9930	.9831	.9363	.7965	.4848
TIME = .013	.4683	.7797	.9269	.9792	.9909	.9792	.9269	.7797	.4683
TIME = .014	.4533	.7636	.9174	.9750	.9884	.9750	.9174	.7636	.4533
TIME = .015	.4396	.7483	.9077	.9704	.9855	.9704	.9077	.7483	.4396
TIME = .016	.4271	.7338	.8981	.9655	.9823	.9655	.8981	.7338	.4271
TIME = .017	.4155	.7198	.8884	.9603	.9788	.9603	.8884	.7198	.4155
TIME = .018	.4048	.7066	.8788	.9548	.9749	.9548	.8788	.7066	.4048
TIME = .019	.3948	.6939	.8692	.9491	.9708	.9491	.8692	.6939	.3948
TIME = .020	.3856	.6818	.8597	.9432	.9663	.9432	.8597	.6818	.3856
TIME = .021	.3769	.6702	.8503	.9371	.9615	.9371	.8503	.6702	.3769
TIME = .022	.3688	.6591	.8410	.9307	.9565	.9307	.8410	.6591	.3688
TIME = .023	.3612	.6485	.8319	.9243	.9512	.9243	.8319	.6485	.3612
TIME = .024	.3540	.6383	.8228	.9177	.9457	.9177	.8228	.6383	.3540
TIME = .025	.3472	.6285	.8139	.9109	.9400	.9109	.8139	.6285	.3472
TIME = .026	.3408	.6191	.8052	.9041	.9341	.9041	.8052	.6191	.3408
TIME = .027	.3347	.6101	.7965	.8972	.9280	.8972	.7965	.6101	.3347
TIME = .028	.3289	.6013	.7880	.8901	.9218	.8901	.7880	.6013	.3289
TIME = .029	.3234	.5929	.7796	.8831	.9154	.8831	.7796	.5929	.3234

TIME = .030	.3181	.5848	.7713	.8759	.9088	.8759	.7713	.5848	.3181
TIME = .031	.3131	.5769	.7632	.8687	.9022	.8687	.7632	.5769	.3131
TIME = .032	.3083	.5693	.7552	.8615	.8955	.8615	.7552	.5693	.3083
TIME = .033	.3036	.5619	.7473	.8543	.8886	.8543	.7473	.5619	.3036
TIME = .034	.2992	.5547	.7395	.8470	.8817	.8470	.7395	.5547	.2992
TIME = .035	.2949	.5477	.7318	.8397	.8747	.8397	.7318	.5477	.2949
TIME = .036	.2908	.5409	.7243	.8324	.8677	.8324	.7243	.5409	.2908
TIME = .037	.2868	.5343	.7168	.8251	.8606	.8251	.7168	.5343	.2868
TIME = .038	.2829	.5279	.7094	.8179	.8535	.8179	.7094	.5279	.2829
TIME = .039	.2792	.5216	.7022	.8106	.8464	.8106	.7022	.5216	.2792
TIME = .040	.2756	.5155	.6950	.8033	.8392	.8033	.6950	.5155	.2756
TIME = .041	.2721	.5095	.6879	.7961	.8320	.7961	.6879	.5095	.2721
TIME = .042	.2687	.5037	.6810	.7889	.8248	.7889	.6810	.5037	.2687
TIME = .043	.2653	.4980	.6741	.7817	.8177	.7817	.6741	.4980	.2653
TIME = .044	.2621	.4924	.6673	.7746	.8105	.7746	.6673	.4924	.2621
TIME = .045	.2590	.4869	.6606	.7674	.8033	.7674	.6606	.4869	.2590
TIME = .046	.2559	.4815	.6539	.7604	.7961	.7604	.6539	.4815	.2559
TIME = .047	.2529	.4763	.6474	.7533	.7890	.7533	.6474	.4763	.2529
TIME = .048	.2500	.4711	.6409	.7463	.7819	.7463	.6409	.4711	.2500
TIME = .049	.2471	.4660	.6345	.7393	.7748	.7393	.6345	.4660	.2471
TIME = .050	.2443	.4610	.6282	.7324	.7677	.7324	.6282	.4610	.2443
TIME = .051	.2416	.4561	.6219	.7255	.7607	.7255	.6219	.4561	.2416
TIME = .052	.2389	4513	.6157	.7187	.7536	.7187	.6157	.4513	.2389
TIME = .053	.2363	.4465	.6096	.7119	.7467	.7119	.6096	.4465	.2363
TIME = .054	.2337	.4418	.6036	.7052	.7397	.7052	.6036	.4418	.2337
TIME = .055	.2312	.4372	.5976	.6985	.7329	.6985	.5976	.4372	.2312
TIME = .056	.2287	.4327	.5917	.6919	.7260	.6919	.5917	.4327	.2287
TIME = .057	.2262	.4282	.5858	.6853	.7192	.6853	.5858	.4282	.2262
TIME = .058	.2238	.4238	.5800	.6788	.7124	.6788	.5800	.4238	.2238
TIME = .059	.2215	.4195	.5743	.6723	.7057	.6723	.5743	.4195	.2215
TIME = .060	.2191	.4152	.5687	.6659	.6991	.6659	.5687	.4152	.2191
TIME = .061	.2168	.4110	.5631	.6595	.6925	.6595	.5631	.4110	.2168
TIME = .062	.2146	.4068	.5575	.6532	.6859	.6532	.5575	.4068	.2146
TIME = .063	.2124	.4027	.5520	.6469	.6794	.6469	.5520	.4027	.2124
TIME = .064	.2102	.3986	.5466	.6407	.6729	.6407	.5466	.3986	.2102
TIME = .065	.2080	.3946	.5413	.6345	.6665	.6345	.5413	.3946	.2080
TIME = .066	.2059	.3906	.5359	.6284	.6601	.6284	.5359	.3906	.2059
TIME = .067	.2038	.3867	.5307	.6224	.6538	.6224	.5307	.3867	.2038
TIME = .068	.2017	.3828	.5255	.6164	.6475	.6164	.5255	.3828	.2017
TIME = .069	.1997	.3790	.5203	.6104	.6413	.6104	.5203	.3790	.1997
TIME = .070	.1976	.3752	.5152	.6045	.6352	.6045	.5152	.3752	.1976
TIME = .071	.1957	.3715	.5102	.5987	.6291	.5987	.5102	.3715	.1957
TIME = .072	.1937	.3678	.5052	.5929	.6230	.5929	.5052	.3678	.1937
TIME = .073	.1917	.3641	.5003	.5872	.6170	.5872	.5003	.3641	.1917
TIME = .074	.1898	.3605	.4954	.5815	.6111	.5815	.4954	.3605	.1898
TIME = .075	.1879	.3570	.4905	.5759	.6052	.5759	.4905	.3570	.1879

TIME =	.076	.1860	.3534	.4857	.5703	.5994	.5703	.4857	.3534	.1860
TIME =	.077	.1842	.3499	.4810	.5648	.5936	.5648	.4810	.3499	.1842
TIME =	.078	.1824	.3465	.4763	.5593	.5878	.5593	.4763	.3465	.1824
TIME =	.079	.1805	.3431	.4716	.5539	.5822	.5539	.4716	.3431	.1805
TIME =	.080	.1788	.3397	.4670	.5485	.5765	.5485	.4670	.3397	.1788
TIME =	.081	.1770	.3364	.4625	.5432	.5709	.5432	.4625	.3364	.1770
TIME =	082	.1752	.3330	.4579	.5379	.5654	.5379	.4579	.3330	.1752
TIME =	.083	.1735	.3298	.4535	.5327	.5599	.5327	.4535	.3298	.1735
TIME =	.084	.1718	.3265	.4490	.5275	.5545	.5275	.4490	.3265	.1718
TIME =	.085	.1701	.3233	.4447	.5224	.5491	.5224	.4447	.3233	.1701
TIME =	.086	.1684	.3201	.4403	.5173	.5438	.5173	.4403	.3201	.1684
TIME =	.087	.1668	.3170	.4360	.5123	.5385	.5123	.4360	.3170	.1668
TIME =	.088	.1651	.3139	.4318	.5073	.5333	.5073	.4318	.3139	.1651
TIME =	.089	.1635	.3108	.4276	.5024	.5281	.5024	.4276	.3108	.1635
TIME =	.090	.1619	.3078	.4234	.4975	.5230	.4975	.4234	.3078	.1619
TIME =	.091	.1603	.3048	.4193	.4927	.5179	.4927	.4193	.3048	.1603
TIME =	.092	.1587	.3018	.4152	.4879	.5129	.4879	.4152	.3018	.1587
TIME =	.093	1572	.2988	.4111	.4831	.5079	.4831	.4111	.2988	.1572
TIME =	.094	.1556	.2959	.4071	.4784	.5030	.4784	.4071	.2959	.1556
TIME =	.095	.1541	.2930	.4031	.4738	.4981	.4738	.4031	.2930	.1541
TIME =	.096	.1526	.2902	.3992	.4692	.4933	.4692	.3992	.2902	.1526
TIME =	.097	.1511	.2873	.3953	.4646	.4885	.4646	.3953	.2873	.1511
TIME =	.098	.1496	.2845	.3915	.4601	.4837	.4601	.3915	.2845	.1496
TIME =	.099	.1481	.2817	.3877	.4556	.4790	.4556	.3877	.2817	.1481
TIME =	.100	.1467	.2790	.3839	.4512	.4744	.4512	.3839	.2790	.1467
TIME =	.101	.1453	.2763	.3801	.4468	.4697	.4468	.3801	.2763	.1453
TIME =	.102	.1438	.2736	.3764	.4424	.4652	.4424	.3764	.2736	.1438
TIME =	.103	.1424	.2709	.3728	.4381	.4606	.4381	.3728	.2709	.1424
TIME =	.104	.1410	.2682	.3691	.4339	.4562	.4339	.3691	.2682	.1410
TIME =	.105	.1397	.2656	.3655	.4296	.4517	.4296	.3655	.2656	.1397
TIME =	.106	.1383	.2630	.3620	.4255	.4473	.4255	.3620	.2630	.1383
TIME =	.107	.1370	.2605	.3584	.4213	.4430	.4213	.3584	.2605	.1370
TIME =	.108	.1356	.2579	.3549	.4172	.4387	.4172	.3549	.2579	.1356
TIME =	.109	.1343	.2554	.3515	.4132	.4344	.4132	.3515	.2554	.1343
TIME =	.110	.1330	.2529	.3481	.4091	.4302	.4091	.3481	.2529	.1330
TIME =	.111	.1317	.2504	.3447	.4051	.4260	.4051	.3447	.2504	.1317
TIME =	.112	.1304	.2480	.3413	.4012	.4218	.4012	.3413	.2480	.1304
TIME =	.113	.1291	.2456	.3380	.3973	.4177	.3973	.3380	.2456	.1291
TIME =	.114	.1279	.2432	.3347	.3934	.4137	.3934	.3347	.2432	.1279
TIME =	.115	.1266	.2408	.3314	.3896	.4096	.3896	.3314	.2408	.1266
TIME =	.116	.1254	.2385	.3282	.3858	.4056	.3858	.3282	.2385	.1254
TIME =	.117	.1242	.2362	.3250	.3820	.4017	.3820	.3250	.2362	.1242
TIME =	.118	.1229	.2338	.3218	.3783	.3978	.3783	.3218	.2338	.1229
TIME =	.119	.1217	.2316	.3187	.3746	.3939	.3746	.3187	.2316	.1217
TIME =	.120	.1206	.2293	.3156	.3710	.3901	.3710	.3156	.2293	.1206
TIME =	.121	.1194	.2271	.3125	.3674	.3863	.3674	.3125	.2271	.1194

TIME = .122	.1182	.2249	.3095	.3638	.3825	.3638	.3095	.2249	.1182
TIME = .123	.1171	.2227	.3065	.3603	.3788	.3603	.3065	.2227	.1171
TIME = .124	.1159	.2205	.3035	.3567	.3751	.3567	.3035	.2205	.1159
TIME = .125	.1148	.2184	.3005	.3533	.3715	.3533	.3005	.2184	.1148
TIME = .126	.1137	.2162	.2976	.3498	.3678	.3498	.2976	.2162	.1137
TIME = .127	.1126	.2141	.2947	.3464	.3643	.3464	.2947	.2141	.1126
TIME = .128	.1115	.2120	.2918	.3431	.3607	.3431	.2918	.2120	.1115
TIME = .129	.1104	.2100	.2890	.3397	.3572	.3397	.2890	.2100	.1104
TIME = .130	.1093	.2079	.2862	.3364	.3537	.3364	.2862	.2079	.1093
TIME = .131	.1082	.2059	.2834	.3331	.3503	.3331	.2834	.2059	.1082
TIME = .132	.1072	.2039	.2806	.3299	.3469	.3299	.2806	.2039	.1072
TIME = .133	.1061	.2019	.2779	.3267	.3435	.3267	.2779	.2019	.1061
TIME = .134	.1051	.1999	.2752	.3235	.3401	.3235	.2752	.1999	.1051
TIME = .135	.1041	.1980	.2725	.3203	.3368	.3203	.2725	.1980	.1041
TIME = .136	.1031	.1961	.2698	.3172	.3335	.3172	.2698	.1961	.1031
TIME = .137	.1021	.1941	.2672	.3141	.3303	.3141	.2672	.1941	.1021
TIME = .138	.1011	.1923	.2646	.3111	.3271	.3111	.2646	.1923	.1011
TIME = .139	.1001	.1904	.2620	.3080	.3239	.3080	.2620	.1904	.1001
TIME = .140	.0991	.1885	.2595	.3050	.3207	.3050	.2595	.1885	.0991
TIME = .141	.0982	.1867	.2570	.3021	.3176	.3021	.2570	.1867	.0982
TIME = .142	.0972	.1849	.2545	.2991	.3145	.2991	.2545	.1849	.0972
TIME = .143	.0962	.1831	.2520	.2962	.3115	.2962	.2520	.1831	.0962
TIME = .144	.0953	.1813	.2495	.2933	.3084	.2933	.2495	.1813	.0953
TIME = .145	.0944	.1795	.2471	.2905	.3054	.2905	.2471	.1795	.0944
TIME = .146	.0935	.1778	.2447	.2876	.3024	.2876	.2447	.1778	.0935
TIME = .147	.0926	.1760	.2423	.2848	.2995	.2848	.2423	.1760	.0926
TIME = .148	.0916	.1743	.2399	.2821	.2966	.2821	.2399	.1743	.0916
TIME = .149	.0908	.1726	.2376	.2793	.2937	.2793	.2376	.1726	.0908
TIME = .150	.0899	.1709	.2353	.2766	.2908	.2766	.2353	.1709	.0899
TIME = .151	.0890	.1693	.2330	.2739	.2880	.2739	.2330	.1693	.0890
TIME = .152	.0881	.1676	.2307	.2712	.2852	.2712	.2307	.1676	.0881
TIME = .153	.0873	.1660	.2285	.2686	.2824	.2686	.2285	.1660	.0873
TIME = .154	.0864	.1644	.2263	.2660	.2797	.2660	.2263	.1644	.0864
TIME = .155	.0856	.1628	.2240	.2634	.2769	.2634	.2240	.1628	.0856
TIME = .156	.0847	.1612	.2219	.2608	.2742	.2608	.2219	.1612	.0847
TIME = .157	.0839	.1596	.2197	.2583	.2716	.2583	.2197	.1596	.0839
TIME = .158	.0831	.1581	.2176	.2558	.2689	.2558	.2176	.1581	.0831
TIME = .159	.0823	.1565	.2154	.2533	.2663	.2533	.2154	.1565	.0823
TIME = .160	.0815	.1550	.2133	.2508	.2637	.2508	.2133	.1550	.0815
TIME = .161	.0807	.1535	.2113	.2484	.2611	.2484	.2113	.1535	.0807
TIME = .162	.0799	.1520	.2092	.2459	.2586	.2459	.2092	.1520	.0799
TIME = .163	.0791	.1505	.2072	.2435	.2561	.2435	.2072	.1505	.0791
TIME = .164	.0784	.1491	.2052	.2412	.2536	.2412	.2052	.1491	.0784
TIME = .165	.0776	.1476	.2032	.2388	.2511	.2388	.2032	.1476	.0776
TIME = .166	.0768	.1462	.2012	.2365	.2487	.2365	.2012	.1462	.0768
TIME = .167	.0761	.1447	.1992	.2342	.2462	.2342	.1992	.1447	.0761

TIME = .168	.0754	.1433	.1973	.2319	.2438	.2319	.1973	.1433	.0754
TIME = .169	.0746	.1419	.1954	.2297	.2415	.2297	.1954	.1419	.0746
TIME = .170	.0739	.1406	.1935	.2274	.2391	.2274	.1935	.1406	.0739
TIME = .171	.0732	.1392	.1916	.2252	.2368	.2252	.1916	.1392	.0732
TIME = .172	.0725	.1378	.1897	.2230	.2345	.2230	.1897	.1378	.0725
TIME = .173	.0718	.1365	.1879	.2208	.2322	.2208	.1879	.1365	.0718
TIME = .174	.0711	.1352	.1860	.2187	.2299	.2187	.1860	.1352	.0711
TIME = .175	.0704	.1338	.1842	.2166	.2277	.2166	.1842	.1338	.0704
TIME = .176	.0697	.1325	.1824	.2144	.2255	.2144	.1824	.1325	.0697
TIME = .177	.0690	.1312	.1806	.2124	.2233	.2124	.1806	.1312	.0690
TIME = .178	.0683	.1300	.1789	.2103	.2211	.2103	.1789	.1300	.0683
TIME = .179	.0677	.1287	.1771	.2082	.2190	.2082	.1771	.1287	.0677
TIME = .180	.0670	.1274	.1754	.2062	.2168	.2062	.1754	.1274	.0670
TIME = .181	.0663	.1262	.1737	.2042	.2147	.2042	.1737	.1262	.0663
TIME = .182	.0657	.1250	.1720	.2022	.2126	.2022	.1720	.1250	.0657
TIME = .183	.0651	.1238	.1703	.2002	.2105	.2002	.1703	.1238	.0651
TIME = .184	.0644	.1226	.1687	.1983	.2085	.1983	.1687	.1226	.0644
TIME = .185	.0638	.1214	.1670	.1964	.2065	.1964	.1670	.1214	.0638
TIME = .186	.0632	.1202	.1654	.1944	.2045	.1944	.1654	.1202	.0632
TIME = .187	.0626	.1190	.1638	.1926	.2025	.1926	.1638	.1190	.0626
TIME = .188	.0620	.1178	.1622	.1907	.2005	.1907	.1622	.1178	.0620
TIME = .189	.0614	.1167	.1606	.1888	.1985	.1888	.1606	.1167	.0614
TIME = .190	.0608	.1156	.1591	.1870	.1966	.1870	.1591	.1156	.0608
TIME = .191	.0602	.1144	.1575	.1852	.1947	.1852	.1575	.1144	.0602
TIME = .192	.0596	.1133	.1560	.1834	.1928	.1834	.1560	.1133	.0596
TIME = .193	.0590	.1122	.1545	.1816	.1909	.1816	.1545	.1122	.0590
TIME = .194	.0584	.1111	.1529	.1798	.1891	.1798	.1529	.1111	.0584
TIME = .195	.0579	.1100	.1515	.1780	.1872	.1780	.1515	.1100	.0579
TIME = .196	.0573	.1090	.1500	.1763	.1854	.1763	.1500	.1090	.0573
TIME = .197	.0567	.1079	.1485	.1746	.1836	.1746	.1485	.1079	.0567
TIME = .198	.0562	.1069	.1471	.1729	.1818	.1729	.1471	.1069	.0562
TIME = .199	.0556	.1058	.1456	.1712	.1800	.1712	.1456	.1058	.0556
TIME = .200	.0551	.1048	.1442	.1695	.1783	.1695	.1442	.1048	.0551

(c)　変数分離法による解析解は

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}\sin(2n+1)\pi x.$$

表B.3で，$u(0.1,t)$が，この問題の(陽的な)Euler法と(陰的な)Crank-Nicolson法との比較が行なわれる．

表 B.3.

時間	解析解	Euler	誤差	C-N	誤差
0.001	0.9747	0.9000	7.7	0.9089	6.8
0.002	0.8862	0.8200	7.5	0.8337	5.9
0.005	0.6827	0.6566	3.8	0.6731	1.4
0.010	0.5205	0.5113	0.9	0.5234	−0.6
0.050	0.2442	0.2429	0.5	0.2443	微小
0.100	0.1467	0.1460	0.4	0.1467	微小
0.200	0.0547	0.0546	微小	0.0551	−0.7

Crank-Nicolson法はより速く収束するが，$t=0.200$の近くの解では僅かに過大評価を始めることに注意せよ．

B．4　(*a*)　$u=cx(x-1)$とおくと，次が要求される．

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \phi Lu = \int_0^1 \phi(u''+u'-4) \\
&= \int_0^1 (-\phi' u' - \phi' u - 4\phi) + \phi u'|_0^1 + \phi u|_0^1 \\
&= \int_0^1 [-((2x-1)^2 + x(x-1)(2x-1))c - 4x(x-1)] \\
&= -c/3 + 2/3.
\end{aligned}
$$

これから，$c=2$.

(*b*)　$u(x)=-3e\cdot(1-e^{-x})+4x$

(*c*)　$x=.2, u_\phi=-.32, u=-.35$

$x=.5, u_\phi=-.50, u=-.49$

$x=.8, u_\phi=-.32, u=-.28$

B．5　(*a*)　$u=\frac{1}{2}x(1-x)+cx(2-x)$とおく．

$$0=\int_0^1 \phi_1(u''+4xu-16)$$

から，$c=89/6$. ϕ_0が非同次境界条件を満たす様にとられたことに注意．

(*b*)　中心差分から，$u(0.5)=4$，$u(1.0)=10$，$u(1.5)=10$.

(*c*)　(*a*)より$u_\phi(0.5)=11.25, u_\phi(1.0)=14.83, u_\phi(1.5)=10.75$.

B.6　(a)　$c=9/8, u_\phi=1.125x$.

$c_1=1.295, c_2=-.1511, u_\phi \cong 1.295x-.1511x^2$.

(b)　$u(x)=2\cos x+((2\sin 1-1)/\cos 1)\sin x+x^2-2$.

(c)　$x=.2\ \ u_1=.225\ \ u_2=.253\ \ u=.251$

$x=.5\ \ u_1=.563\ \ u_2=.610\ \ u=.611$

$x=.8\ \ u_1=.900\ \ u_2=.939\ \ u=.940$.

B.7　(a)　ϕ_nとそれらの2階導関数が直交するので，その式は次と連結しない．

$$\begin{cases} a'_n(t)=-n^2a_n(t), t>0 \\ a_n(0)=\langle f,\phi_n\rangle, \quad t=0, n=1,\cdots,N. \end{cases}$$

(b)　選点$x_m=m\pi/(N+1)\,(m=1,\cdots,N)$に対して，近似解は次の形式をもつ．

$$u(x_m,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\phi_n(x_m)$$

離散Wallis公式を用いて，選点条件を通用すると

$$\sum_{n=1}^{N}\sin(m\pi n/(N+1))\sin(k\pi n/(N+1))=\begin{cases}(N+1)/2, k=m, \\ 0, \qquad k\neq m.\end{cases}$$

(c)　幾つかを脚注で与える*)．スペクトル法は今や，最近の高速変換の算法により可能である．

B.8　(a)　$x=0,\ \pi/2,\ \pi$でどの様に離散化するかに従って，異なる初期Gibbs効果を生ずる．それはこの問題には全く現われない．ここにCrank-Nicolson出力を載せる．

T	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9
0	0	0	0	0	.500000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
.100	.004912	.019518	.072653	.269201	.497131	.719399	.887779	.834645	.455110
.200	.021618	.066516	.165658	.304971	.483509	.640822	.696916	.597775	.357468
.300	.043913	.108553	.201929	.326730	.455256	.549239	.563662	.470286	.266422
.400	.060380	.132538	.223305	.324840	.418921	.475820	.467356	.376589	.211360
.500	.069618	.145692	.229124	.313273	.382045	.415208	.394092	.310661	.171553
.600	.073881	.149720	.226151	.295996	.347114	.364889	.337618	.261187	.142774
.700	.074423	.147957	.217420	.276234	.314765	.322786	.292743	.223281	.120975
.800	.072587	.142441	.205476	.255586	.285219	.287043	.256375	.193339	.104045
.900	.069277	.134755	.191881	.235097	.258345	.256354	.226275	.169150	.090534
1.000	.065147	.125942	.177692	.215342	.233966	.229706	.200933	.149183	.079511

(b)　例えば，B.3(b)で与えたCrank-Nicolsonコードを用いよ．一例として，次の出力を得る．

*)　D.Gottlieb and S.Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods* (SLAM, Philadelphia, 1977); P.Prenter, *Splines and Variational Methods* (Wiley, New York, 1975); R.Peyret and T.Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow* (Springer, New York, 1983).

***** CALCULATION DATA *****

R = 1.0　　H = .10　　K = .010　　TMAX = .100

***** COEFFICIENT MATRIX *****

4.0	-1.0	0	0	0	0	0	0	0
-1.0	4.0	-1.0	0	0	0	0	0	0
0	-1.0	4.0	-1.0	0	0	0	0	0
0	0	-1.0	4.0	-1.0	0	0	0	0
0	0	0	-1.0	4.0	-1.0	0	0	0
0	0	0	0	-1.0	4.0	-1.0	0	0
0	0	0	0	0	-1.0	4.0	-1.0	0
0	0	0	0	0	0	-1.0	4.0	-1.0
0	0	0	0	0	0	0	-1.0	4.0

X =	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
TIME = 0	.2000	.4000	.6000	.8000	1.0000	.8000	.6000	.4000	.2000
TIME = .01	.1989	.3956	.5834	.7381	.7691	.7381	.5834	.3956	.1989
TIME = .02	.1936	.3789	.5397	.6461	.6921	.6461	.5397	.3789	.1936
TIME = .03	.1826	.3515	.4902	.5843	.6152	.5843	.4902	.3515	.1826
TIME = .04	.1683	.3218	.4461	.5267	.5555	.5267	.4461	.3218	.1683
TIME = .05	.1538	.2932	.4047	.4770	.5019	.4770	.4047	.2932	.1538
TIME = .06	.1399	.2664	.3672	.4321	.4546	.4321	.3672	.2664	.1399
TIME = .07	.1270	.2418	.3330	.3916	.4119	.3916	.3330	.2418	.1270
TIME = .08	.1153	.2193	.3019	.3550	.3733	.3550	.3019	.2193	.1153
TIME = .09	.1045	.1989	.2738	.3219	.3385	.3219	.2738	.1989	.1045
TIME = .10	.0948	.1803	.2482	.2918	.3069	.2918	.2482	.1803	.0948

(c)　この重要な緩和理論の本書での扱い方は明らかに不十分である*)．

B．9　(*a*)　蛙跳びステンシル(図B.3*c*)は初めてこの問題に自然な形で現われた．けれども，計算の開始時に困難があり，そのため，誤った結果を生ずること，例えば，解の波形に誤った小さな山を作ることがあった．

(*b*)　Lax-Wendroffスキームは，追加した*t*に関する微分演算によって，しばしば，保存形式

$$\rho_t + (F(\rho))_x = 0$$

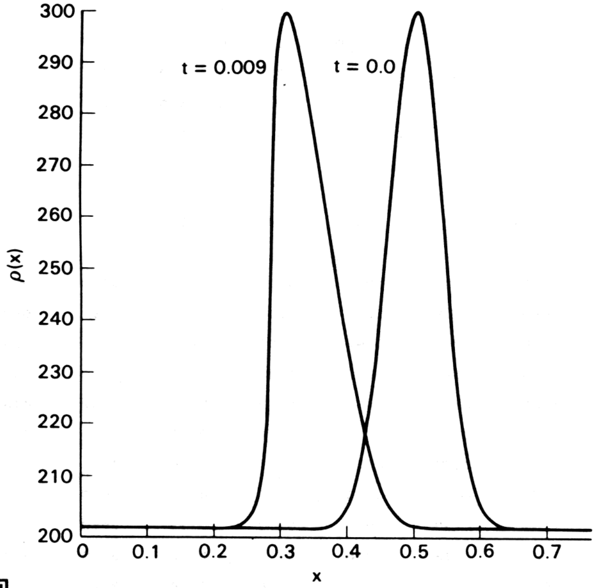
における問題を取扱う†)．蛙跳びスキームに比べて良いけれども，ここで試みた

*)　三つのよい探究的扱いは次書による．W.Hackbusch and U.Trottenberg(ed.) *Multigrid Methods, Proceedings* (Springer Lect.Notes Math., **960**, Berlin, 1982)．次の雑誌には二度特集号が編まれた．*Applied Mathematics and Computations* (1983, 1986)．最近，すぐれた概説書が出版された:W.L.Briggs, *A Multigrid Tutorial* (SIAM, Philadelphia, 1987)．

†)　問題A.9(*c*)に対する解答および，節2.6に引用したAmesの著書を見よ．

二つのコードは，交通量の一時的増加の適当な後方移動を示すことに失敗した*)．

（c）　特性曲線の方法は非線形双曲型波動問題の数値的取扱いに対して重要なものである．$dx/dt=c(\rho)$を満たすx，t平面にある曲線に関する，考慮中の問題に対して，方程式$\rho_t+c(\rho)\rho_x=0$は全微分$d\rho/dt=0$を意味する．これらの曲線上で，$c(\rho)$は一定のままであり，よってこれらの曲線は傾き$c(\rho(x,0))$をもつ直線である．従って，解$\rho(x,t)$はこれらの直線に沿って構成されることができ，見掛け上あと戻りする波を生成する（次の解図参照）．



休止　第６回

1．再びEuler方程式をかくと

$$\rho_t+u\rho_x=-\rho u_x,$$
$$u_t+uu_x=-p_x/\rho,$$
$$p_t+up_x=-\gamma pu_x.$$

それぞれは休止第５回で考えた移流型の方程式である．Riemann問題のほとんどの解析では，衝撃波，扇または接触不連続面によって分離された一定の状態にある解の間でのみ保存則方程式$u_t+(f(u))_x=0$の一意な解の存在が示される．その理由をみよう．

uとpが一定である空間変数の区間上では三つの方程式はすべて右辺が０である．休止第５回の解析によって，これらの方程式は傾きが$dx/dt=u$の特性曲線に沿う定数値を伝える全微分である．この様に相互作用のない領域では，解は初期

*）しかし，次の休止第６回で議論する衝撃波捕捉スキームの幾つかは，この交通流問題に対するすぐれた解答を与える．

値を保ったままである．更にρも空間変数に関して一定であるとき，解はすべて定常的となり，時間的に不変である．

正則（実際は平担）な初期データが与えられたとき，正則（実際は平担）な解に対してこれを選ぶことはそのやり方のままでいる方が安心してよいと思う系の物理学と全く一致している．これは**MAC（細胞）法**または**有限体積法**とよばれ，各時間間隔で平均化された（実際は，多くの例で平担）近似を用いた数値的方法を成功させる鍵でもある．

2．休止第6回で述べた接触不連続性（すべり線または効果的ピストンともよばれる）の概念は簡潔に議論すべき新しい衝撃波動力学である．それは縮退した，または片側の衝撃波とみなされる．その速さは気体動力学の物理学に従って平均化されないが，代りに高圧側で押し出す（効果的ピストンの）速さとみられる．

解析学的には，特性族$dx/dt=\lambda_k$が1次縮退，すなわち，$(\nabla\lambda,\ r_k)=0$のとき起こる．ここで，r_kは準線形双曲型系のヤコビアンAのk次右固有ベクトルである．詳論に深く立ち入るよりむしろRiemann問題を用いて説明しよう．休止第5回の演習問題9から，$\lambda_2=u$で$r_2=(1,0,0)$である．変数$(\rho,\ u,\ p)$の勾配∇は$\nabla=(\partial/\partial\rho,\ \partial/\partial u, \partial/\partial p)$であるから，$(\nabla\lambda_2,\ r_2)=0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0=0$．この様に接触不連続性は“中間的な”特性速度$\lambda_2=u$で生じる．これは衝撃波管の隔膜の瞬間的な破れで右方に生み出された“突進する”速さそのものである．速度と圧力は実際に“ピストン作用”の成分をなすから接触不連続面を越えて連続的である．ここで，物理学的な“正則解の選択”をみる．しかしながら，密度とエネルギーは，仮定した状態方程式（気体法則）を適応させるために埋め合せとなっている不連続性を招くかもしれない*)．

もっと一般的にいえば，右固有ベクトルを用いて，Riemann不変量が定義される．すなわち，$(\nabla w, r_k)=0$を満たす滑らかな関数wである．例えば，$r_2=(1,0,0)$と，丁度考えたばかりの接触不連続面の場合，Riemann不変量は$w^1=\lambda_2=u$である．一般にn個の方程式の双曲型保存則の系に対して，各k次の右固有ベクトルに1次独立な勾配をもつ$n-1$個のRiemann不変量が存在することが示される．r_2における三個のEuler方程式に対して他のRiemann不変量は何か？$(\nabla w, r_2)=w_\rho\cdot1+w_u\cdot0+w_p\cdot0=0$から，$w$は密度$\rho$に依存しないことがわかる．既に$w^1=u$と選んだから，$w^2=p$とする．接触不連続面を越えるとRiemann不変量は一般に連続である．

*）空間次元1および2以上の接触不連続面の優れた議論については付録A.1で引用したCourant and Friedrichsの書を参照せよ．速度と圧力は接触不連続面を越えて直ちに連続化（すなわち，正則化）されるが，密度はそうでないという事実に読者をちゅうちょさせるだろう．電算的なRiemann流が示す様に，テスト問題では初期速度$u_l=u_r=0$は同時に次に起こる流れを導く“滑らかなデルタ関数”を発達させる．接触不連続面は，望まない小さな膨張波をつぶして不鮮明にしたり，または発達させたりする傾向があるから電算的に分析するには定性的な不連続面の中で最も困難なものであるといわねばならない．物理学的には，例えば粘性的作用があるとこれらの傾向は当然起こる．

直線$dx/dt=\lambda_1=u-c$によって仕切られた左方移動の稀薄波および$dx/dt=\lambda_3=u+c$によって仕切られた右方移動衝撃波のRiemann不変量はエントロピー$s=c_v \ln(p/\rho^\gamma)$とそれぞれの相対エンタルピー$u\pm h$である．ここで，エンタルピーは$h=2c/(\gamma-1)$．これらは，Riemann不変量uとpが$dx/dt=\lambda_2=u$において，(例えば正則な)“座標”をもち込んだと全く同様，支持された(例えば正則な)エネルギーと密度の“座標”をもち込むものとみなしてよい．Riemann不変量を見出すことによってRiemann問題の厳密な解析的解の構成が完成する．引用文献を参照せよ．本問題の解答を終えるに当って，一般の双曲型系に対する固有値$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，右固有ベクトル$r_1,\cdots,r_n$および左固有ベクトル$l_1,\cdots,l_n$に関する基礎的レベルで，実際に進めていく幾何学的な見解へのうまい方法があることを述べよう．任意の実対角化可能行列Aの右および左固有ベクトルは互いに直交することを思い出そう(休止第5回の演習問題6)．すなわち，$(r_i,\ l_j)=0(i\neq j)$，$(r_i,\ l_i)\neq 0$．読者はEuler方程式に対してこれをチェックするがよい(休止第5回のr_iとl_jに対する演習問題9参照)．$l_j=\nabla w^j$を考えると，この直交性によって1次独立な勾配をもつ$n-1$個のRiemann不変量w^jに対して解かねばならない$n-1$個の方程式$(r_i,\ l_j)=(r_i,\nabla w^j)=0$を得る．丁度二つの方程式系に対して，この洞察は正しい．(勿論，定数因子を除いて)$\nabla w^j=l_j$．よって，Riemann不変量wはまさに左固有ベクトルに対するポテンシャルであるといえる．$n>2$の場合，固有ベクトル，その他でなく左固有空間に対して記述を変更しなければならないが，幾何学的洞察はここでも有用である．

3 *)．気体動力学スキームへの応用のためのすべての上流型スキームの先駆はGodunov (1959，1962)のスキームである．これを予測子―修正子法形式でかくと，

$$\overline{u}^{n+1}_{i+1/2}=\frac{1}{2}(u^n_{i+1}+u^n_i)-(\Delta t/\Delta x)(F^n_{i+1}-F^n_i),$$
$$u^{n+1}_i=u^n_i-(\Delta t/\Delta x)(\overline{F}^{n+1}_{i+1/2}-\overline{F}^{n+1}_{i-1/2}).$$

ここで，Δt＝一様時間増分，$n\Delta t$＝評価時間，Δx＝一様空間増分，$i\Delta x$と$(i+1)\Delta x$はi次x細胞(有限体積)を囲み，$i\pm 1/2$は細胞の中央に位置する値を示す．$\bar{u}$は細胞上の平均を示し(休止第5回の演習問題8を参照)，Fは修正子平均$\overline{u}$が流れ項の評価に用いられることを示している．明らかに区分的に一定の近似$\overline{u}$を使用することは都合がいい，というのはデータは少くとも区分的に一定の区間内において短時間にかけて特性解に沿って伝播するからである．時間的に二段階前進させ

*)　これらのスキームのすべてを一層積極的に扱うことを望んだが，休止と書物の長さの制限故にそれが許されない．従って，大変簡潔ではあるが，スキームの詳細にたいして，鍵となる幾つかの論旨を述べておこう．

ると，Riemann問題の数値解または厳密な解析解を用いることができる．安定性については，$(\Delta t/\Delta x)\leqq 1$が必要であるが実際はより小さな$\Delta t$が用いられる．これは二つの隣り合う細胞だけが相互にかかわって左右の細胞境界で次の解の値を生み出すことを保証するためである．区分的に一定の近似が用いられるから，これらの細胞境界はすべて“衝撃波”を起こしそうにみられ，そう扱われる．

Glimm (1965) 等は，双曲型保存則に対する解の存在証明にこの数値手続きを用いた．Glimmが導入したのは衝撃位置を犠牲にして衝撃の分解を改良しそうにみえる$\bar{u}$を勝手に選択するやり方である．Chorin (1976) はGlimmの方法を流体動力学的シミュレーションにとって大変有用な数値的設定に向けた*)．

4．流束分裂のない中心型スキーム，例えば古典的なLax-Wendroffのツーステップスキーム

$$u_{i+1/2}^{n+1/2}=\frac{1}{2}(u_{i+1}^n+u_i^n)-(\Delta t/2\Delta x)(F_{i+1}^n-F_i^n)$$
$$u_i^{n+1}=u_i^n-(\Delta t/\Delta x)(F_{i+1/2}^{n+1/2}-F_{i-1/2}^{n+1/2})$$

は好ましくない振動を生じ，解の不連続点近くで物理学的でない数値さえ生ずる結果となった．この結果，しばらくの間，例えば，Lax-Wendroffや，もっと基本的なCrank-Nicolson（付録B参照）などの古典的な2次の中心型スキームは多用されなくなった．しかしその後，保存的な散逸数値流束項を加えることによって，これらの　スキームは安定化されて今ではTVDスキームと競い合っている†)．

5．TVD（全変動逓減）型スキームは解の不連続面での振動を切捨てる様に設計された．全変動$\mathrm{T.V.}(u^n)=\sum_i|u_i^n-u_{i+1}^n|$は格子上の全振動を示す．$\mathrm{T.V.}(u^{n+1})\leqq\mathrm{T.V.}(u^n)$，すなわち振動が時間の経過とともに減少するならば，そのスキームは**全変動逓減型**といわれる．

気体動力学（特に，電算空気動力学）への応用のため，1980年代はTVDの発展に大きな努力がなされた‡)．TVDスキームに属する重要なものは単調スキーム，す

*) Van Leer, Steger, Warming, Roe, Osher, Engquist, Fromm, 他多数の人達の上流型スキームについては，引用したSodの論文および最近の文献を参照せよ．

†) Davis, Roe, Yeeおよびその他の人々の対称的中心型スキームの解説と数値的比較に関しては，H. Yee, “Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications”, *J. Comput. Phys.*, 68 (1987), 151-179を参照せよ．休止第6回で注意した様に，上流型スキームは通常中心型スキームとしてかきかえられる．逆に，中心型スキームは通常何んらかの上流型スキームを作るものと解釈される．よって，これらのスキームを区別するときは注意を払われなければならない．

‡) 最初の論文はA. Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *J. Comput. Phys.*, **49** (1983), 359-393であった．その他多くの研究者の仕事に関する文献は先の脚注のYeeの論文を参照せよ．現在では，多過ぎるほどの曖昧さ（鋭さのない衝撃）と振動（Gibbs効果にあたる様な）の間の最良の折衷案をもたらすあらゆる試み，TVB, UNO, ENO, …，とよばれるスキームがある．

なわち,

$$u_i^{n+1}=H(u_{i-1}^n,u_i^n,u_{i+1}^n)$$

の形にかかれるとき，Hが各変数について単調非減少関数であるとき，スキームは**単調**であるといわれる．GodunovやLax-Friedrichsのスキームの様に多くの古いスキームは単調である．単調スキームは不連続面で，(鮮明でない)滑らかな解を生み出すが，そこでは1次的な正確さでしかない．

重要なTVDスキーム，衝撃を除いた2階のものは次の様にかかれる:

$$u_i^{n+1}=u_i^n+(\Delta t/\Delta x)[C^-(a_{i+1/2}^n)\Delta_{i+1/2}u^n-C^+(a_{i-1/2}^n)\Delta_{i-1/2}u^n]$$

とかかれる．ここで,

$\Delta_{i+1/2}u^n=u_{i+1}^n-u_i^n$,

$a_{i+1/2}^n=(F(u_{i+1}^n)-F(u_i^n))/\Delta_{i+1/2}u^n$，または$\Delta_{i+j}u^n=0$のとき，

$F'(u)$の何んらかのよい近似，例えば，行列Aの適当な固有値$\lambda_k(u^n)$,

$C^\pm(z)=\dfrac{1}{2}|Q(z)\pm z|$,$Q$はある種のエントロピー不等式を満たすことを保証するために用いられる数値的粘性項．

6．空間的な後退差分$\dot{u}_j=\lambda(u_j-u_{j-1})/\Delta x$に対して，モード$u_j(t)=v(t)e^{ikj\Delta x}$は常微分方程式$\dot{v}+cv=0$を生じる．ここで$c=\lambda(1-e^{-ik\Delta x})/\Delta x$．解$v(t)=Ce^{-ct}$は，係数$c$の実部が非負であれば，すべての$t\geqq 0$に対して有界である．しかし，$\mathrm{Re}\,c=\lambda(1-\cos k\Delta x)/\Delta x=\lambda(2\sin^2(k\Delta x/2))/\Delta x$から，$\lambda$は非負でなければならない．同様に，空間的前進差分では解がすべての$t>0$に対して有界であるためには$\lambda\leqq 0$が必要である．

7．流束分裂に関してより詳しいことは，特に電算的空気動力学への重要な応用のための有限体積とTVDスキームを結合させることについて，ここで既に引用した文献*)を，また更にAIAA誌およびNASAの出版物を参照せよ．流束を分裂させる方法には多くの変形がある．

*)　衝撃波管問題の数値テストを含む納得のいく解説として，優れた文献を加えておく．J.L.Steger and R.F.Warming, "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods," *J.Comput.Phys.*, **40** (1981), 263-293. 上記文献にEulerの気体動力学的方程式の同次性$F(\lambda U)=\lambda F(U)$の全効力が流束分裂の状況下で初めて電算的に開発された事実がある．

気体動力学的流束分裂の計算で大変有用なEulerの不変性$F(\lambda u)=\lambda F(U)$の意味に言及しよう．この性質の述べることは，もし$\rho(x,t)$，$u(x,t)$および$p(x,t)$がそれぞれ解であれば，$\lambda\rho(x,t)$，$\lambda u(x,t)$および$\lambda p(x,t)$も任意の$\lambda$に対して解である，ということである．この$\lambda$は応用において初期データ$\rho(x,0)$，$u(x,0)$および$p(x,0)$によって拘束される．換言すれば，１次のEuler同次性*)は初期条件を無視すれば得られるものである．これは偏微分方程式に応用される典型的な群の性質である．

8．小さい粘性があると面倒である．連続媒質内の波動伝播に対する気体法則を導いているとする．単位長さ当りの密度を$\rho(x,t)$，単位時間当りの流束を$F(x,t)$とする．このとき，流れの速度は$u=F/\rho$で定義される．物質保存から，物質の平衡

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx=F(b,t)-F(a,t)$$

が成り立ち，$\rho(x,t)$がC^1クラスとすると，微分保存則を得る．すなわち

$$\rho_t+F_x=0.$$

Fがρのみに依存し，$F=F(\rho)$でかつ滑らかに関係しているとき，１階の準線形偏微分方程式へ移行される．すなわち，

$$\rho_t+F'(\rho)\rho_x=0.$$

一方，流束Fが密度変化，例えばρ_xに何んらかの依存性$F=F(\rho,\ \rho_x)$があると，保存則は暗に高次ρ_{xx}の効果を含む．例えば，νを正定数として，$F(\rho,\ \rho_x)=f(\rho)-\nu\rho_x$とおく．この$\rho_x$への単純な１次依存性は偏微分方程式

$$\rho_t+f'(\rho)\rho_x=\nu\rho_{xx}$$

となる．たとえ（粘性）係数νがどんなに小さくても，解の定性的振舞いは根本的に以前の（非粘性）法則の場合と異なる．ラプラシアン項$\nu\rho_{xx}$は拡散や解の平滑化，非

*)　Eulerの同次性が成り立つためには$p=\rho f(\varepsilon)$の形の状態方程式が必要である．ここで，εは内部エネルギー．読者は，これは結局方程式の特殊な分離された相似解の選択に帰着するということを認識すべきである．用いた気体法則$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon$は有効な線形性を示している．ここでは気体定数は定圧比熱と定積比熱の比として$\gamma=c_p/c_v$で与えられる．休止第５回の脚注と節1.7.1で早くから指摘した様に，一定比熱を仮定する必要性は，別の方法では手に負えない方程式をより解析的に扱い易くするきわ立った役割を演じる．

さらにもう少し述べれば，衝撃と稀薄でのRiemann不変量はエントロピー$s=c_v\ln(p/\rho^\gamma)$と相対エンタルピー$u\pm h$であることに注意しよう．エンタルピーhは$h=2c/(\gamma-1)=2(\gamma p/\rho)^{1/2}/(\gamma-1)$．相似解の気体法則およびそれらにおける一定比熱，$c_v$と$c_p$に関する仮定の相対的効果は，エントロピーとエンタルピー不等式が“正しい”物理学的解をさぐり当てることを主張する際によく理解される．

常に異なったデータの伝播経路を導入する．例えば，$f'(\rho)=0$のとき，熱方程式となり，x軸に平行な特性曲線に沿って瞬時に無限遠までデータを伝播する．

この例は，流体動力学の十分な粘性をもつNavier-Stokes方程式を扱うときの観点の変更*)をもたらすもので，これに対して次のそして最後の付録Cで簡潔に触れることにする．単純化しすぎではあるが，十分粘性をもつNavier-Stokes方程式に対して粘性楕円型項は解析に影響を与えるが，これに反して休止第5回と第6回で扱われた打ち切りEuler方程式に対しては対流双曲型の項が解析を左右した．

9．双曲型保存則の系，特にEulerの気体動力学系の解の存在は，好適(例えば，区分的に平坦)な初期データに対して区分的に一定，かつ衝撃，扇または接触不連続面によって接続される解の構成によって示された．一意性はこれらの規則に対して極限解の構成範囲内で得られた．電算的近似法はこれらの区分的に一定な(または，最近では区分的に多項式の)解およびこれらを補間する規則に大いに依存する．初期データは，解析解および数値解の安定性を望めばそれほど大きな変動をもつわけにはいかない．すなわちρは0ではないとしておく．そうでないと，$u_t+uu_x=-\rho^{-1}p_x$によって，速度が“爆発”する．そして選んだ(物理学的)解をみながら，正則性の役割を進めた．

観点は**純粋初期値問題**の立場であった．**境界値問題**は考えられなかった．**変数分離法**は特性座標に沿って達せられる．**発散定理**はずっと暗黙の中に在った．双曲型系のヤコビアンAに対する**固有値問題**は主要な不連続性の伝播方向，および不連続面を越える解の性質を与えてくれた．

C．1　(*a*)　非圧縮性条件$u_x=0$は，移流項uu_xと拡散項νu_{xx}の両方を消すので，運動量方程式は

$$u_t=-p_x$$

となる．よってこの方程式は，$u(x,t)$と$p_x(x,t)$を関係づける1階の方程式になっている．

(*b*)　運動量方程式の両辺の発散をとり，微分演算の順序を交換して，

$$\mathrm{div}\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{div}\frac{1}{Re}\Delta u+\mathrm{div}(u\cdot\nabla)u=-\mathrm{div\ grad}\ p.$$

*)　Rayleigh卿，“On the question of the stability of the flow of fluids,” *Phil. Mag.*, [v] **34** (1892),59-70から.George G.Stokes卿が示したように，定常運動は粘性のあるものであれば何んでも同じである;そして，回転が全く生成されない非粘性流体の流れとは全く異なっている．この様に考えると，固体障害物の近傍において非粘性流体の主題に関してかかれてきた多くの解釈について疑問がわいてくる．

この式から，

$$\Omega\text{内で}\quad -\Delta p=\mathrm{div}(u\cdot\nabla)u.$$

速度uのベクトル成分と，圧力がスカラー関数である事実を記憶しておこう．いかに気安く，与えられた方程式の可微分性を仮定したかに注目しよう．しかし，この“過剰正則性演算”は任意の滑らかな解に対して，物理学的に確かめられる．

同様に，境界$\partial\Omega$上の非圧縮性条件はそこでの不混和条件$n\cdot u=0$と見なされる資格があり，よって，運動量方程式に外向き法線nを内積的に乗じると

$$\partial\Omega\text{上で}\quad n\cdot\nabla p=-n\cdot((u\cdot\nabla)u)+\frac{1}{Re}\cdot n\cdot\Delta u^{*)}$$

に到達する．よって，速度uがわかれば，圧力に対するNeumann-Poisson問題になる．この事は数多くの数値的スキームの基礎である．すなわち，速度u_Nと圧力p_{N+1}を時間について１つ進めるのに，交互に行なわれる．

(*c*)　問(*b*)の圧力方程式は次の様になる．

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0,\qquad a<x<b.$$

いいかえると，流体運動の発達する各瞬間に，圧力は調和関数，すなわち，１次関数でなければならない，

$$p(x,t)=c(t)x+d(t).$$

運動量方程式から，加速度はtのみに依存し

$$u_t(x,t)=-c'(t).$$

よって，$u(x,t)=-c(t)+k(x)$．ここで$k'(x)=0$から，kは定数である．

今までの所，初期条件や境界条件を考慮していない．$t=0$とおいて，$u(x,0)=-c(0)+k$．すなわち，一定初期速度分布のみが許される．これにDirichlet境界条件を加え

ると，流れがないことになる．

C．2(*a*)　滑らかなΩに対して，一意的な解ϕ_3の存在がわかる．次に注意せよ．

$$\mathrm{div}\ u_d=\mathrm{div\ grad}\ \phi_3=\Delta\phi_3=\mathrm{div}\ u,$$
$$\mathrm{curl}\ u_d=\mathrm{curl\ grad}\ \phi_3=\mathbf{0}.$$

(*b*)　次の適合条件(節1.6.1問題２参照)が満たされるとき，解の存在がやはり示される．

$$0=\int_\Omega\Delta\phi_1=\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\oint_{\partial\Omega}n\cdot u-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_3}{\partial n}.$$

*)　この式は文献によって異っているが，これでよしとされる．

この式は，次式から成り立つことがわかる．

$$\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_3}{\partial n}=\int_\Omega \Delta\phi_3=\int_\Omega \mathrm{div}\ u=\oint_{\partial\Omega}u\cdot n.$$

ϕ_1が定数を除いて決定されるので，その勾配は一意的に定まることおよびdiv u_p $=\Delta\phi_1=0$，curl u_p=curl grad $p_1=0$に注意せよ．

(*c*)　正規直交性*)はGreen等式と発散定理の演習問題である．

$$\int_\Omega u_d u_p=\int_\Omega \mathrm{grad}\ \phi_3\cdot\mathrm{grad}\ \phi_1=\oint_{\partial\Omega}\phi_3\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\int_\Omega \phi_3\Delta\phi_1=0$$

および

$$\int_\Omega u_d u_c=\int_\Omega (u-u_d)\mathrm{grad}\ \phi_3=\oint_{\partial\Omega}\phi_3(u-u_d)\cdot n-\int_\Omega \phi_3\mathrm{div}(u-u_d)=0$$

が成り立つ．

C．3　(*a*)　境界上で消える発散なしのすべてのu，v，wに対して，$\int_\Omega (u\cdot\nabla v)w=-\int_\Omega (u\cdot\nabla w)v$．よって与えられた式は，$v=w$のとき0．

(*b*)　弱形式によって，$-\Delta u-f$はH_sのすべてのソレノイド・ベクトルuに直交することが述べられる．よって，これはH_dで勾配∇pに等しくなければならない．微妙ではあるけれども，常に存在することを示すことができる．

(*c*)　非定常の場合，二，三の解が付録A.3の方法である場合に知られている．解はReynolds数に依らないことも起り得る．

C．4　(*a*)　立方体のΩに対して，大きなΩに含まれる小立方体の個数は$(l_0/l_d)^3$である．よって，乱流の開始近くでみられる微小渦の全個数は$O((l_0/l_d)^3)$．

(*b*)　集合の**フラクタル次元**†)は一種の**Hausdorff測度**で，その集合をε-球で被覆する下限として得られる．ある種の型のすべての流れが最終的に辿り着く普遍アトラクター集合がある．非特異な決定論的Navier-Stokes方程式に関する緊密な**アプリオリ**な評価によって，次が示される‡)．

*)　Green等式がL^p空間でも同様に成り立つので，Helmholtz定理の直和分解はHilbert空間$(L^2(\Omega))^n$を超えて，もっと一般に成り立つ．このとき，正規直交性は，双対空間における線形汎関数あるいは超関数の存在へ道を与える．

†)　B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (Freeman, San Francisco, 1977).（訳者注：本書の増補改定版*Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco (1982)がある．フラクタル幾何学（広中平祐監訳），日経サイエンス社）．

‡)　次を見よ．P. Constantin, C. Foias, R. Temam, *Attractors representing turbulent flows* (Mem. Amer. Math. Soc., **314**, Providence, 1985)．そこでは，この理論が（すべての時間に対し解の正則性を保持するとの仮定のもとで）厳密な基礎の上にうち立てられている．

$$\text{アトラクターのフラクタル次元} \leqq c\left(\frac{l_0}{l_d}\right)^3 = c\left(\frac{1}{\lambda_1^{3/2}}\right)\left(\frac{\varepsilon^{3/4}}{\nu^{9/4}}\right) \sim c\frac{Re^{9/4}}{\lambda_1^{3/2}}\cdot\left(\frac{1}{Re}\right)^{3/4}\cdot\left(\lambda_m^M\right)^{3/4}.$$

ここで，$\nu = Re^{-1}$は粘性係数を示し，λ_1はStokes作用素の第一固有値（$\lambda_1 \sim \lambda_0$に注意）．εは上述の単位時空当りのエネルギー散逸の平均率，もう少し詳しく述べると，ある時間にアトラクターに入ってくるすべての流れU_0についての極限である，すなわち，

$$\varepsilon = \nu \lim_{t\to\infty} \sup\left(\sup_{U_0}\frac{1}{t}\int_0^t \sup_{\Omega}|\mathrm{grad}\ u(x,\tau)|^2 d\tau\right).$$

ただし，λ_m^Mは上極限である．

（c）上記lim supの式を，流れに常に持続できる最大固有値（最高振動数）と解釈してもよい．より高い振動数はKolmogorovの公準に従って消滅するだろう．大きなmに対して３次元で，$\lambda_m \sim c\lambda_1 m^{2/3}$が知られるので，普遍アトラクター集合の次元は

$$\frac{Re^{3/2}}{\lambda_1^{3/2}}\cdot\left(\lambda_m^M\right)^{3/4} \sim \left(\frac{Re}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{3/2}\cdot m^{1/2}$$

によって下から押えられる．Reとmが乱流の流れに対してかなり大きいことが期待されるので，任意の現実的シミュレーションは多く（例えば，10^9）の自由度を追跡する必要がある様にみえる．他方，上の評価は上界を与え，エネルギー散逸の割合εに対してとられた式に強く依存する．

C．5　（a）未だなされていない．

（b）恐らく可能であろう．次節を見よ．

（c）節1.9.8のVan der Pol方程式．λを０に近づけよ．よりよい例は，固有値λがHopf分岐点に近づくに従って，定常的最終状態から周期的状態への転移を示す．

C．6　（a）着想*）は，３次元で流れが二，三個のゆるく連結された円環の間を迅速にかつでたらめにさまようことにあった．この種のアトラクター集合は**奇妙なアトラクター**と呼ばれる．

（b）最初の例†）は，気象学で極端に単純化された方程式，すなわち，系

*）次を見よ．D.Ruelle and F.Taken, "On the nature of turbulence," *Comm. Math. Phys.*, **20** (1971) 167-192; **23** (1971) 343-344.

†）次を見よ．E.N.Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmos. Sciences,* **20** (1963), 130-141.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x(t) - \sigma y(t) \\ \dot{y}(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) = y(t)x(t) - bz(t) \end{cases}$$

に見られた.

(c)　両方法で証拠がある*).

C. 7 (a)　curl grad $p=0$ゆえ，$\omega = v_x - u_y = -\psi_{xx} - \psi_{yy}, \Delta\omega = -\Delta^2\psi = 0$. 流れ関数$\psi$の存在は非圧縮性条件$u_x = -v_y$からわかる. $\partial\Omega$上で$\psi=0$とおくことで流れ関数を一意にする.

(b)　離散的渦度の境界条件を設定することは, 流れ関数の渦度定式化を用いるとき弱い連結になることであるが, 予想される指定はかなりよい結果を示す. この事および他の定式化については, 文献を見よ.

(c)　安定性に対して, 幾つかの緩和が必要で,

$$\omega_{補正} = \gamma\omega_{新} + (1-\gamma)\omega_{旧}$$

なる補正を行なう. ここで, γは小さな値にとられ, 例えば, 数値的な経験則によって, $\gamma=0.1$とか0.01がよい値にみえる.

C. 8 (a)　この問題は線形.

(b)　一連の論文がこれを示した. 中心的なステップ†)は, かどの二等分線に沿って計算された横速度$v = -\mathrm{Re}(\partial\psi/\partial r)$を見出したことである. $r\to 0$のとき, $v = v(r)$は無限個の零点$r_n(n=1,2,\cdots)$をもつことがわかる.

(c)　Green第二等式. 平板固有値はすべて正値. よって, $\lambda=0$での解だけが自明のもの.

C. 9 (a)　かどで沈み込む流れは非常に遅く, よってStokes流で精度よく近似される.

(b)　例えば, 左側の壁から剥れる第一の“−”状態は, たとえそれが幾つかの下位の“−”状態に分裂したり融合したりしても, 終りまで続く.

(c)　特に重要なのは, 柱体へ還元する技法, 共役勾配の算法および, 多重格子法である. どれ一つをとっても, それ自身大きな主題である‡).

*)　次を見よ. J.H.Curry, J.R.Herring, J.Loncaric and S.S.Orszag, “Order and disorder in two- and three-dinensional Bénard convection,” *J.Fluid Mech.*, **147** (1984), 1-38.

†)　H.K.Moffatt, “Viscous and resistive eddies near a sharp corner,” *J.Fluid Mech.*, **18** (1964), 1-18.

‡)　例えば, 次を見よ. R.A.Sweet, “A generalized cyclic reduction algorithm,” *SIAM J. Numer. Anal.*, **11** (1974), 506-520. M.Hestenes, *Conjugate Direction Methods in Optimization* (Springer, New York, 1980). W.Hackbusch, U.Trottenberg, 本書p.203の脚性.

訳者あとがき

本書はK.E.Gustafson : *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods* (2nd ed.), John Wiley & Sons, New York,1987の後半部分の翻訳である．本書の第３章に関係して，新たに原著者から原著書にはない「休止第５回」および「休止第６回」からなる稿が寄せられ，それによって下巻は補充され，その内容が一層充実したものになった．その分多少この刊行が遅れたことを，先づ，読者諸氏にお詫びしたい．

さて，本書の特徴を幾つか挙げてみよう．第一に，素材が非常に端正に並べられているのに気付く．すなわち，三つの章立てから始まり，各章に３(×３)個の節を設け，さらに各節は必要なら三つの小節から成る．先づ，原著者の教育理念として，学習に際して，初読のとき，十分に注意を払って臨み，次に一般的な状況をもよく連想し，三度目に大切な特徴を強調して反復する様に述べている．

次に気付く事は豊富な脚注である．これは，論理の本質を見失う事なく展開できる一方で，必要な場合に付随するコメントを学び，利用できる様に適切に配備した原著者の教育的配慮のためであろう．ここで，訳者は原著には無いが，脚注の引用文献に，学習者の便を考えて，できるだけ原著論文の題名を加えた．また，引用著書のうち，邦訳のあるもの（原著書またはその増補（改訂）版に対し）については訳者注でそれらを指摘しておいた．

さらに，レベルの異なる多くの素材が含まれているのに驚かされるし，採用されたものの分野も多岐にわたっている．そして本書の主題“偏微分方程式”の範囲を大幅に超えた題材であっても，何ら抵抗なく学習できる様になっており，これら高度の教育的配慮のもとで，各所に配置された素材は有機的に結びついて，美事な配列をなしている．

この様に，まえがきにも述べたが，他にも顕著な特徴を備えた原著書は米国教育界において大変高い評価を得ていると共に，数学教育のテキストとして定着しているのが現状である．

本書の翻訳に当って，上述の様に多方面の分野における術語が次々と現われたが，その分野での標準的と思われる辞典等を参考にした．しかし，原著には独特の術語が散見する．例えば，Fourier級数における“Gibbs効果”がその例で，我が国では“Gibbs現象”と一般に用いられているが，原著書では“Gibbs' effect”を用いている．その他必要に応じて，括弧付きで英名を付した．

また，第１章に度々出てくる弾性弦(膜)と弾性棒(平板)の境界条件について述べなければならない．支配方程式の階数は，前者が２階，後者が４階である．変位をいずれもuとすると，条件$u=0$と$\partial u/\partial n=0$を境界条件にもつ弾性弦(膜)はそれぞれfixed end(固定端)，free end(自由端)といわれる．一方，弾性棒(平板)に対するfree endは応力無し(uは任意, $\partial u/\partial n=0$)の場合で, $u=0$で$\partial u/\partial n$が任意のものをsupport-

ed end(支持端)，$u=\partial u/\partial n=0$の条件がclamped end(噛み締め端)と呼ばれる．なお最後の訳語は文部省学術用語集地震学編に拠った．

また，最近の*computational physics*と称する分野の発展は，本書に指摘されるまでもなく，目覚ましいものがある．これに対応する用語として，“計算物理学”が一般に用いられているけれども，他の場合を含めて，用語の統一を図ったため，computationalの訳語には，“電算(的)”を採用した．

その他，英語の発音をそのまま仮名書きにした術語が用いられる場合が多いが，含まれる概念を明確に表す言葉を見出す事ができれば，誤用と判断されない限り，それを用いた．

最後に，原著者K.E.Gustafson教授の近況について触れておきたい．

本書による学習効果に関するアンケート例が最近著者より送られてきた．それによると，教授の指導は多くの小さな問題よりも，徹底的に主題を研究するための宿題の構想が明快である点が最も特徴的であり，著者は教育にも情熱にあふれた教授である事が指摘されている．数学専攻でない学生に対しても，高度な偏微分方程式の題材を容易に処理できる様，大変な努力が払われ，学生に学習意欲を益々高揚させるという才能と技量を兼ね備え，さらにそれを楽しんでいるとの評価も得ている．

教育と研究の第一線にあって，多忙な日々を送る教授と訳者達との交流は，今後も続くであろう．これらによって多くの事柄を学び，教えられると共に，原著書にある歴史的事項へのコメント(問題1.9.5(1)訳書上巻p114)に触発されて行ったG. Robinの研究(その一部は，1987年8月群馬大学工学部で開催された“漢字文化圏の数学史と数学教育国際シンポジウム(主催:日本数学史学会)”において，T.Abe and I.Onda : *G.Robin and His Contributions to Mathematics*として報告された)の発展が望まれる．多くの未知と謎を秘めた天才G.Robinは，数理科学史上永遠にその名を留められるべきと考える．フランス数学会の長老J.Dieudonné氏も，Gustafson教授の問題の指摘によって，Robinの調査に奔走して疲れたと，教授からの私信で知った．私達を含めて，この様な人達を教授はすばしこい魚に喩え，those who “took the bait”と呼んで，ユーモアを交えてからかい，喜んでいる．その実，Robinの研究の困難さを知り抜いていて，その打開と推進を心から願っている．

多くの話題を提供する本原著第2版の増補版としての日本語版は原著の予定第3版(この日本語版と本質的な変更はない)に先立って刊行されたが，それも，Gustafson教授の日本の数学教育に寄せる大いなる期待と奉仕の精神から生じたものである事は私達はよく承知している．ここに教授への深甚な謝意を表して，このあとがきを終える．

末筆ながら，上巻を含めて本書の出版・刊行に暖かい御理解と御尽力を頂いた海外出版貿易株式会社の黒田肇社長，森俊雄営業部長，大野富積営業第一課長に，また数多くの印刷上の要求に心よく応えて頂いた株式会社トッパンの鎌形眞澄営業課

長，同課の佐藤進氏を始めとする印刷現場の皆様に大変御世話になったことを感謝し，ここに重ねて御礼を申し上げる．

1992年5月　訳者

人 名 索 引

頁数：上巻＝立体,下巻＝斜体

術語索引

頁数：上巻＝立体,下巻＝斜体
(→……)：……を見よ．

H

L

M

N

訳者略歴

(んだ いさお)
音田 功

957年　北海道大学理学部地球物理学科卒業

961年　同大学大学院理学研究科博士課程中退

現在　群馬大学工学部教授 理学博士

専攻　応用数学，地震学

著書　「複素解析学入門」（共訳）東京図書．「土木耐震工学」（共著）コロナ社　ほか多数

(あべ たけひさ)
阿部 剛久

1961年　早稲田大学第一理工学部応用物理学科卒業

1964年　同大学大学院理工学研究科数学専攻修士課程修了

現在　芝浦工業大学システム工学部教授

専攻　代数解析学，応用数学

著書　「微分方程式入門」森北出版．「統計学要論」（共著）共立出版　ほか多数

応用偏微分方程式（下）
—近代的方法への入門—

1992年9月1日発行

著　者　K.E.グスタフソン

訳　者　音田　功
　　　　阿部剛久

発行者　黒田　肇

発行所　海外出版貿易株式会社
東京都千代田区神田司町2丁目21〒101
電話(03)3292-4271振替東京52453

Printed in Japan